

БИОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Умаров Хабибулла Рахматуллаевич

Гулистанский государственный университет,
старший преподаватель кафедры «Математике», город Гулистан, Узбекистан,
e-mail: umarovhr@mail.ru тел: +998 97 341 87 17
<https://doi.org/10.5281/zenodo.14472657>

Аннотация. Математические модели давно и весьма успешно применяются в механике, физике, астрономии. В современный период роль математических методов в естествознании все возрастает. Они теперь широко используются и в биологии, и в химии. Здесь также успешно применяются математические модели. Данная статья содержит некоторые из этих применений.

Annotation. Mathematical models have long been very successfully used in mechanics, physics, and astronomy. In the modern period, the role of mathematical methods in natural science is increasing. They are now widely used in both biology and chemistry. Mathematical models are also successfully applied here. This article contains some of these applications.

Аннотация. Математик моделлар узоқ вақтлардан бери механика, физика ва астрономияда жуда муваффақиятли қўлланилиб келинмоқда. Ҳозирги даврда эса табиатшуносликда ҳам математик усулларнинг роли ортиб бормоқда. Улар ҳозир биологияда ҳам, кимёда ҳам кенг қўлланилади. Ушбу мақолада улардан баъзилари келтирилади.

Калит сўзлар. математик модел, аниқ интеграл, популяция ҳажми (сони), ўртача учиш узунлиги.

Ключевые слова. математическая модель, определенного интеграл, численность популяции, средняя длина полета.

Keywords. mathematical model, definite integral, population size, mean span length.

Роль математики в различных областях естествознания и в разное время была неодинаковой. Она складывалась исторически, и существенное влияние на нее оказывали два фактора: уровень развития математического аппарата и степень зрелости знаний об изучаемом объекте, возможность описать его основные черты и свойства на языке математических понятий и соотношений, или, как теперь принято говорить, возможность построить «математическую модель» изучаемого объекта.

Приведем простейший пример математической модели. Представим себе, что требуется определить площадь пола комнаты. Для выполнения такого задания измеряют длину и ширину комнаты, а затем перемножают полученные числа. Эта элементарная процедура фактически означает следующее. Реальный объект – пол комнаты – заменяется абстрактной математической моделью – прямоугольником. Прямоугольнику приписываются размеры, полученные в результате измерения, и площадь такого прямоугольника приближенно принимается за искомую площадь.

Математическая модель, основанная на некотором упрощении, идеализации, никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, не передает всех его свойств и особенностей, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность математически сформулировать задачу его изучения и воспользоваться для анализа его свойств математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы

данного объекта. Этот аппарат позволяет единообразно описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т. е. прогнозировать результаты будущих наблюдений.

Математические модели давно и весьма успешно применяются в механике, физике, астрономии.

В современный период роль математических методов в естествознании все возрастает. Они теперь широко используются и в биологии, и в химии. Здесь также успешно применяются математические модели. Данная статья содержит некоторые из этих применений.

1. Численность популяции. Число особей в популяции (численность популяции) меняется со временем. Если условия существования популяции благоприятны, то рождаемость превышает смертность и общее число особей в популяции растет со временем. Назовем скоростью роста популяции прирост числа особей в единицу времени. Обозначим эту скорость $v = v(t)$. В «старых», установившихся популяциях, давно обитающих в данной местности, скорость роста $v(t)$ мала и медленно стремится к нулю. Но если популяция молода, ее взаимоотношения с другими местными популяциями еще не установились или существуют внешние причины, изменяющие эти взаимоотношения, например сознательное вмешательство человека, то $v(t)$ может значительно колебаться, уменьшаясь или увеличиваясь.

Если известна скорость роста популяции $v(t)$, то мы можем найти прирост численности популяции за промежуток времени от t_0 до T . В самом деле, из определения $v(t)$ следует, что эта функция является производной от численности популяции $N(t)$ в момент t , и, следовательно, численность популяции $N(t)$ является первообразной для $v(t)$.

Поэтому

$$N(t) - N(t_0) = \int_{t_0}^T v(t) dt \quad (1)$$

Известно, что в условиях неограниченных ресурсов питания скорость роста многих популяций экспоненциальна, т. е. $v(t) = ae^{kt}$. Популяция в этом случае как бы «не стареет». Такие условия можно создать, например, для микроорганизмов, пересаживая время от времени развивающуюся культуру в новые емкости с питательной средой. Применяя формулу (1), в этом случае получим:

$$N(t) = N(t_0) + a \int_{t_0}^T e^{kt} dt = N(t_0) + ae^{kt} \Big|_{t_0}^T = N(t_0) + a(e^{kT} - e^{kt_0}) \quad (2)$$

По формуле, подобной (2), подсчитывают, в частности, численность культивируемых плесневых грибов, выделяющих пенициллин.

2. Средняя длина пролета. В некоторых исследованиях необходимо знать среднюю длину пробега, или среднюю длину пути при прохождении животным некоторого фиксированного участка.

Приведем соответствующий расчет для птиц. Пусть участком будет круг радиуса R (рис. 1). Будем считать, что R не слишком велико, так что большинство птиц изучаемого вида пересекает этот круг по прямой.

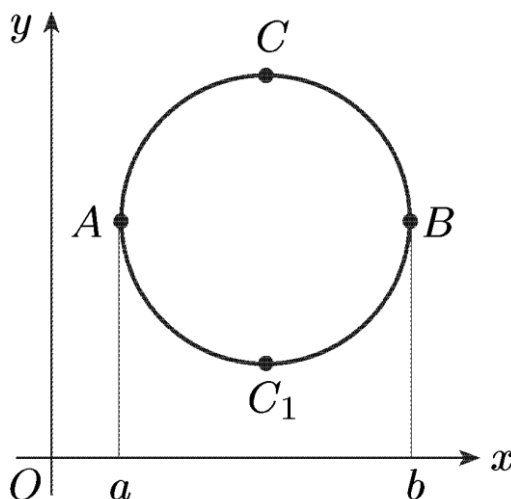


Рис. 1

Птица может под любым углом в любой точке пересечь окружность. В зависимости от этого длина ее пролета над кругом может быть равной любой величине от 0 до $2R$. Нас интересует средняя длина пролета. Обозначим ее через l .

Так как круг симметричен относительно любого своего диаметра, нам достаточно ограничиться лишь теми птицами, которые летят в каком-нибудь одном направлении, параллельном оси Oy (см. рис. 1). Тогда средняя длина пролета – это среднее расстояние между дугами ACB и AC_1B .

Иными словами, это среднее значение функции $f_1(x) - f_2(x)$, где $y = f_1(x)$ – уравнение верхней дуги, а $y = f_2(x)$ – уравнение нижней дуги, т. е.

$$l = \frac{\int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx}{b - a}$$

или

$$l = \frac{\int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx}{b - a} \quad (3).$$

Так как

$$\int_a^b f_1(x) dx$$

равен площади криволинейной трапеции $aACBb$, а

$$\int_a^b f_2(x)dx$$

равен площади криволинейной трапеции aAC_1Bb , то их разность равна площади круга, т. е. πR^2 . Разность $b-a$ равна, очевидно, $2R$. Подставив это в (3), получим:

$$l = \frac{\pi R^2}{2R} = \frac{\pi}{2} R.$$

Список литературы:

1. Бейли Н. Математика в биологии и медицине: Пер. с англ. – М.: Мир, 1970.
2. Бугров Я. С, Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988.
3. Гроссман С, Тернер Дэю. Математика для биологов: Пер. с англ. – М.: Высшая школа, 1983.
4. Корниш-Боуден Э. Основы математики для биохимиков: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.