

BA'ZI FIZIKA FANIGA OID MASALALARNI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR YORDAMIDA YECHISH

M.I.Xolmatova

1-kurs talabasi

Toshkent farmatsevtika instituti, Toshkent

<https://doi.org/10.5281/zenodo.14323417>

Annotatsiya: Maqolada differentsial tenglamalar yordamida fizikaga oid masalalarni yechish usullari keltirilgan.

Kalit so'zlar: differentsial tenglama, yechim, hususiy yechim, jismning sovishi, tuzli aralashma.

Аннотация: В статье представлены методы решения физических задач с помощью дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, решение, частное решение, охлаждение тела, солевая смесь.

Abstract: The article presents methods for solving physics problems using differential equations.

Keywords: differential equation, solution, particular solution, cooling of a body, salt mixture.

Ilmiy ishning dolzarbligi: fizika, matematika, biologiya, kimyo, meditsina, farmatsevtika va boshqa fanlarda uchraydigan ko'plab jarayonlar differensial tenglamalar yordamida tavsiflanadi. Shu tenglamalarni o'rganish bilan tegishli jarayonlar haqida biror ma'lumotga, tasavvurga ega bo'lamiz. O'sha differensial tenglamalar o'rganilayotgan jarayonning matematik modelidan iborat bo'ladi. Bu model qancha mukammal bo'lsa, differensial tenglamalarni o'rganish natijasida olingan ma'lumotlar jarayonlarni shuncha to'la tavsiflaydi.

Ishning maqsadi: differensial tenglamalarning fizik masalalarni yechishga tatbiqlari o'rganilgan.

Tadqiqot uslubi va materiallari: fizik masalaning shartiga ko'ra differensial tenglamani tuzishda quyidagi ketma-ketlik tavsiya etiladi:

1. Qaralayotgan hodisada o'zgaruvchi qiymatlarni o'rnatish va ular bilan bog'liq bo'lgan fizik qonunlarni ochib berish;
2. Biz topmoqchi bo'lgan erkli o'zgaruvchi va noma'lum funksiya tanlash;
3. Masala shartlaridan kelib chiqib boshlang'ich va chegaraviy shartlarni aniqlash;
4. Masala shartlarida asosiy rol o'ynaydigan qiymatlarni erkli o'zgaruvchi, noma'lum funksiya uning hosilalari orqali ifodalash.
5. Qaralayotgan hodisa bo'ysunadigan fizik qonunlar va masala shartlaridan kelib chiqib differensial tenglamani tuzish;
6. Differensial tenglamaning umumiy yechimi yoki umumiy integralini topish;
7. Boshlang'ich yoki chegaraviy shartlarga ko'ra xususiy yechimni topish;
8. Olingan yechimni tahlil qilish.

Qaralayotgan jarayonni yoki o'rganilayotgan hodisaning xarakteristikalarini orasidagi bog'liqlikni ifodalaydigan differensial tenglamani tuzish, ba'zida buni yechishdan ko'ra osonroq bo'lib chiqadi. Differensial tenglamalar tuzishning universal usuli mavjud emas, shuning uchun faqatgina ba'zi umumiy ko'rsatmalar berish mumkin. Faraz qilaylik, $y = y(t)$

- o'rganilayotgan jarayonning t va y xarakteristiklari orasidagi noma'lum bog'liqlik bo'lsin. $y(t)$ funksiya yechim bo'ladigan differensial tenglamani tuzishda erkli o'zgaruvchi t ga Δt ortirma qo'shilganda $y(t)$ funksiya qanchaga o'zgarishini ifodalash zarur, ya'ni $y(t + \Delta t) - y(t)$ ayirmani masalada qaqtnashadigan qiymatlar orqali ifodalash kerak. Bu ayirmani Δt ga bo'lib va $\Delta t \rightarrow 0$ da limitga o'tib, differensial tenglamani, ya'ni t nuqtada y qiymatning o'zgarish tezligi bog'liqligini olamiz. Ko'p hollarda ko'rsatilgan bog'liqlik qonun yoki tabiatning u yoki bu sohasida o'rnatilgan tajriba faktlari asosida aniqlanadi. Bunda xususan, hosilaning geometrik ma'nosi yoki uning fizik ma'nosidan foydalaniladi [1,2,3].

Jismning sovishi haqidagi masala.

Massasi m , issiqlik sig'imi c o'zgarmas bo'lgan jism boshlang'ich paytda T_0 temperaturaga ega bo'lsin. Atrof muhit temperaturasi o'zgarmas va T ($T_0 > T_M$) ga teng. Jismning cheksiz kichik dt vaqt ichida bergan issiqlik jism va uning atrofidagi muhit temperaturalari orasidagi farqqa, shuningdek, vaqtga proporsional ekanligini (Nyuton qonuni) etiborga olgan holda jismning sovush qonunini topish talab qilinsin [1].

Yechish. Sovush davomida jism temperaturasi T_0 dan T_M gacha pasayadi. Vaqtning t paytida jism temperaturasi T ga teng bo'lsin. Cheksiz kichik dt vaqt oralig'ida jism bergan issiqlik miqdori yuqorida aytilganiga ko'ra

$$dQ = -\alpha(T - T_M)dt$$

ga teng, bunda $\alpha = \text{const}$ - proporsionallik koeffitsienti.

Ikkinchi tamondan, jism T temperaturadan T_M temperaturagacha sovuganda beradigan issiqlik miqdori $Q = mc(T - T_M)$ ga teng, demak, $dQ = mcdT$. Endi dQ uchun topilgan har ikkala ifodani taqqoslab

$$mcdT = -\alpha(T - T_M)dt$$

differensial tenglamani hosil qilamiz. O'zgaruvchilarni ajratib

$$\frac{dT}{T - T_M} = -\frac{\alpha}{mc}dt,$$

integrallasak,

$$\ln(T - T_M) = -\frac{\alpha}{mc}t + \ln C \text{ yoki } T - T_M = Ce^{-\frac{\alpha t}{mc}}$$

ekani kelib chiqadi.

$t = 0$ da $T - T_0$ boshlang'ich shartdan foydalanib $C = T_0 - T_M$ ekanligini topamiz, shuning uchun jismning sovush qonuni (xususiy echim)

$$T = T_M + (T_0 - T_M)e^{-\frac{\alpha t}{mc}}$$

ko'rinishda bo'ladi.

α koeffitsient yo bevosita berilishi yoki qo'shimcha shart, masalan, $t = t_1$ da $T = T_1$ orqali berilishi kerak.

Bunday holda

$$T_1 - T_M = (T_0 - T_M)e^{-\frac{\alpha t_m}{mc}}$$

bo'ladi, bundan

$$e^{-\frac{\alpha}{mc}} = \left(\frac{T_1 - T_M}{T_0 - T_M} \right)^{\frac{1}{t_2}}.$$

Demak,

$$T = T_M + (T_0 - T_M) \left(\frac{T_1 - T_M}{T_0 - T_M} \right)^{\frac{t}{t_1}}.$$

Masala. Agar muhit temperaturasi $T_m = 20^0C$ bo'lsa, $t_1 = 10$ min ichida jism $T_0 = 100^0C$ dan $T_1 = 60^0C$ gacha sovisa, jism temperaturasi qancha vaqt ichida 25^0C gacha pasayishini toping [1]?

Yechish. Biz quyidagi $T = T_M + (T_0 - T_M) \left(\frac{T_1 - T_M}{T_0 - T_M} \right)^{\frac{t}{t_1}}$ formulaga berilgan- larni

qo'yamiz,

$$T = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{10}} \Rightarrow 25 = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{10}} \Leftrightarrow 5 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{10}} \quad \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{10}}$$

tenglikdan $t = 40$ min ekanini topamiz. Demak, javob: $t = 40$ min.

Aralashmaga doir masalalar.

Idishda tarkibida b kg tuzdan iborat bo'lgan a kg suyuqlik bor. Agar idishga uzluksiz ravishda minutiga c kg toza suv tushmoqda va aralashib (idishdagi suyuqlik bilan) shunday tezlik bilan chiqib ketyapti. t vaqtdan keyin idishda qancha miqdorda tuz qoladi.

Yechish. $y(t)$ orqali idishga suv kirib boshlagandan t vaqt o'tgandagi idishdagi tuz miqdorini belgilaymiz. U holda $c \cdot \Delta t$ kg suv tushib, aralashmadan chiqib ketayotgan aralashma tarkibida $c \cdot \frac{y(t)}{a} \cdot \Delta t$ kg tuz chiqib ketadi. Demak, $[t, t + \Delta t]$ oraliqda tuz miqdorining

o'zgarishi quyidagi tenglamaga teng bo'ladi:

$$y(t + \Delta t) = y(t) - c \cdot \frac{y(t)}{a} \cdot \Delta t$$

$$y(t + \Delta t) - y(t) = -c \cdot \frac{y(t)}{a} \cdot \Delta t$$

tenglikning har ikki tomonini Δt ga bo'lib

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -c \cdot \frac{y(t)}{a}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ limitga o'tsak, quyidagi differensial tenglamaga ega bo'lamiz:

$$y'(t) = -c \cdot \frac{y(t)}{a},$$

bu tenglamani yechib, $y(0) = b$ boshlang'ich shartni ham hisobga olib quyidagi yechimga ega bo'lamiz:

$$y = be^{-\frac{c}{a}t}.$$

Fizikadagi ko'plab masalalar shu ko'rinishdagi tenglamaga keltirib yechiladi.

Masala. Idishda tarkibida 10 kg tuzdan iborat bo'lgan 100 l suyuqlik bor. Idishga uzluksiz ravishda minutiga 5 l suv tushmoqda va aralashib (idishdagi suyuqlik bilan) shunday tezlik bilan chiqib ketyapdi. 1 soat dan keyin idishda qancha miqdorda tuz qoladi?

Yechish. $y(t)$ orqali idishga suv kirib boshlagandan t vaqt o'tgandagi idishdagi tuz miqdorini belgilaymiz. U holda $5 \cdot \Delta t$ l suv tushib, chiqib ketayotgan aralashma tarkibida

$5 \cdot \frac{y(t)}{100} \cdot \Delta t$ kg tuz chiqib ketadi. Demak, $[t, t + \Delta t]$ oraliqda tuz miqdorining o'zgarishi

quyidagiga teng bo'ladi:

$$y(t + \Delta t) = y(t) - 5 \cdot \frac{y(t)}{100} \cdot \Delta t$$

$$y(t + \Delta t) - y(t) = -5 \cdot \frac{y(t)}{100} \cdot \Delta t$$

tenglikning har ikki tomonini Δt ga bo'lib

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -5 \cdot \frac{y(t)}{100}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ limitga o'tsak, quyidagi differensial tenglamaga ega bo'lamiz:

$$y'(t) = -5 \cdot \frac{y(t)}{100},$$

bu tenglama t vaqtga bog'liq tuz miqdorining o'zgarish tenglamasi (qonuniyati) hisoblanadi.

Topilgan differensial tenglama o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama bo'lib uni integrallab, tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{20} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{20}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dt}{20} + \ln C,$$

$$\ln y - \ln C = -\frac{t}{20}, \quad y = C \cdot e^{-\frac{t}{20}}$$

Shunday qilib, $y = C \cdot e^{-\frac{t}{20}}$ tenglamaning umumiy yechimini beradi. Boshlang'ich vaqtda idishdagi tuz miqdori 10 kg bo'lgan. Shuning uchun, $10 = C \cdot e^0$ bundan $C=10$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak,

$$y(t) = 10 \cdot e^{-\frac{t}{20}}$$

funksiya masala shartlaridan kelib chiqqan holda, azotning vaqtga bog'liq o'zga-rish qonunini beradi. Endi, so'ralgan 1 soatdan keyin qancha tuz miqdori qolishini topish uchun soatda min ga o'tamiz ya'ni 1 soat=60 min va t ning o'rniga qo'yamiz:

$$y(60) = 10 \cdot e^{-\frac{60}{20}} \text{ kg yoki } y(60) = 10 \cdot e^{-3} \text{ kg,}$$

demak, 1 soatdan keyin tuz miqdori $y(60) = \frac{10}{e^3} \approx \frac{10}{19,7}$ kg ga teng bo'lar ekan.

Masala. 20 l hajmli idish havo bilan to'ldirilgan (80% azot, 20% kislorod) idishga sekundiga 0,1l azot uzluksiz ravishda kirypdi va aralashib shuncha miqdordagi aralashma chiqib ketyapdi. Qancha vaqtdan keyin idishdagi azot 99% ni tashkil qiladi.

Yechish. $y(t)$ orqali idishga azot kirish boshlangandan t vaqt o'tgandagi idishdagi azot miqdorini belgilaymiz. U holda $0,1\Delta t$ l aralashmada $\frac{0,1y\Delta t}{20}$ l azot bo'ladi. Masala

shartiga ko'ra Δt vaqtda idishga $0,1\Delta t$ l azot kiradi va $0,1 \cdot \frac{y(t)\Delta t}{20}$ l azot chiqib ketadi.

Demak, $[t, t + \Delta t]$ oraliqda azot miqdorining o'zgarishi quyidagiga teng bo'ladi:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + 0,1 \cdot \Delta t - 0,1 \cdot \frac{y(t)}{20} \cdot \Delta t$$

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0,1 \cdot \Delta t - 0,1 \cdot \frac{y(t)}{20} \cdot \Delta t$$

tenglikning har ikki tomonini Δt ga bo'lib

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = 0,1 - 0,1 \cdot \frac{y(t)}{20}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ limitga o'tsak, quyidagi differensial tenglamaga ega bo'lamiz:

$$y'(t) = 0,1 - 0,1 \cdot \frac{y(t)}{20},$$

Topilgan differensial tenglama o'zgaruvchilari ajralgan diferensial tenglama bo'lib uni integrallab, tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{20 - y}{200} \Leftrightarrow \frac{dy}{20 - y} = \frac{dt}{200}$$

$$\int \frac{dy}{20 - y} = \int \frac{dt}{200} + \ln C,$$

$$\ln(y - 20) - \ln C = -\frac{t}{200},$$

$$y = 20 + Ce^{-\frac{t}{200}}$$

Shunday qilib, tenglamaning umumiy yechimi $y = 20 + Ce^{-\frac{t}{200}}$ dan iborat. Boshlang'ich vaqtda idishdagi havoning 80% i, ya'ni 16 litri azotdan iborat bo'lgan. Shuning uchun, $16 = 20 + Ce^0$, bundan $C = -4$ kelib chiqadi.

Demak,

$$y(t) = 20 - 4e^{-\frac{t}{200}} \quad (2.3)$$

funksiya masala shartlaridan kelib chiqqan holda, azotning vaqtga bog'liq o'zgarish qonunini beradi. Endi, qancha vaqtda aralashmaning 99% ini azot tashkil etishini topamiz. 99% azot bu 19,8 azot deganidir. (2.3) dan foydalanib,

$$19,8 = 20 - 4e^{-\frac{t}{200}}, \quad -0,2 = -4e^{-\frac{t}{200}} \\ t = 200 \ln 20 \text{ sekund yoki } t \approx 10 \text{ min.}$$

topamiz.

Natijalar: yuqoridagi masalalarni yechish uchun differentsial tenglamalar tuzildi va tahlil qilindi.

Hulosa: aralashmalarga oid masalalar umumiy holda ko'rib ishlab chiqildi yechim tahlil qilindi, ularga oid masalalarni differensial tenglamalari tuzilib berilgan boshlang'ich shartlar orqali xususiy yechim topildi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Abduraxmonov B.A., Xurramov Sh.R. Oliy matematika. Farmatsevtik ta'lim muassalarining talabalari uchun o'quv qo'llanma. 1-jild / -T.; 2018.
2. Баврин И. И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей.