

CHIZIQLI MODULLI TENGLAMALARNI FUNKSIYANING XOSSASIDAN FOYDALANIB YECHISH USULLARI

Quvonov Baxtiyor Sayfiyevich

Shamsiddinov Nasriddin Baxriddinovich

TDTU akademik litseyi matematika fani o'qituvchisi, t.f.n.

TDTU akademik litseyi matematika fani o'qituvchisi, f.-m.f.n.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.14323159>

Annotatsiya Maqolada modul belgisi ostida qatnashgan chiziqli ifodalar yig'indisidan tashkil topgan tenglamani, mazkur tenglamadan hosil qilingan funksiyaning xossalaridan foydalanib yechish usullari keltirilgan.

Kalit so'zlar: tugun nuqta, sonlar o'qi, tenglama, absolyut qiymat, modul belgisi, tenglamaning yechimi, yechish usullari, funksiya grafigi.

Аннотация В статье приведены методы решения уравнения, состоящего из суммы линейных выражений под знаком модуля, с помощью свойств функции, составленной из данного уравнения.

Ключевые слова: точка узла, ось чисел, уравнение, абсолютное значение, знак модуля, решение уравнения, методы решения, график функции.

Abstract The article presents methods for solving an equation consisting of a sum of linear expressions under the modulus sign using the properties of a function composed of this equation.

Keywords: node point, number axis, equation, absolute value, modulus sign, solution of equation, solution methods, function graph.

Innovatsion ta'lim muhitida o'quvchilarni fikrlash va mulohaza yuritishga o'rgatish, o'rganilayotgan mavzu yoki masala bo'yicha tanqidiy, kreativ, ijodiy fikrlash qobiliyatiga ega bo'lgan, kuchli raqobat muhiti mavjud bo'lgan sharoitda raqobatga bardoshli kadrlar tayyorlash muhimdir. Shu sababli bugungi kunda ta'lim muassasalarida o'quvchilarni masalani har tomonlama tahliliy o'rganishga odatlantirish talab qilinmoqda.

Modulli tenglamalarni yechish tenglamani modul belgisidan qutqarish uchun shakl almashtirishlar orqali berilgan tenglamaga teng kuchli tenglamaga keltirishdan iborat. Biroq, bunday o'zgarish har doim ham bir vaqtning o'zida barcha modullardan qutilish imkonini bermaydi. Bunday hollarda modulli tenglamalarni yechishda berilgan ifodalalarning aniqlanish sohasi topilgandan keyin, sonlar o'qida modul ostidagi ifodani ishorasi o'zgarmaydigan oraliqlar ajratib olinadi va har bir oraliqda misollar alohida-alohida yechilib, so'ngra natijalar birlashtiriladi. Bunda, ifodaning ishorasi o'zgarmaydigan oraliqni aniqlash va tengsizlikni teng kuchli (ekvivalent) sistemalarga ajratish muhim ahamiyatga ega.

Ushbu ishorasi o'zgarmas oraliqlarni noma'lum o'zgaruvchiningning tugun qiymatlari bilan ajratiladi, bu qiymatlarda modul belgilari ostida ifodalar nolga aylanadi. Shunday qilib, modulli tenglamaning ildizlarini ushbu oraliqlarning har birida alohida izlash kerak. Tenglamani yechishning tavsiya etilgan usuli oraliqlar usuli deb ataladi.

Aksariyat o'quvchilar modulli tenglamalarni yechishda qiyinchilikka duch kelishadi. $|x + a| = b$, $|x + a| = bx + c$, $|ax + b| = |cx + d|$ ko'rinishdagi tenglamalarni yechishda qiyin bo'lmisligi mumkin. Lekin $|x + a| + |x - b| - |x - c| = d$ kabi modullar ayirmasi yoki yig'indisi qatnashgan tenglamalarni yechish o'quvchilarda muammo tug'diradi. Bu tenglamani

yechimini aniqlash uchun bir nechta oraliqlar aniqlanib, har bir oraliqda hosil qilingan tenglamani yechish va olingan natijani shu oraliqqa tegishli ekanini tekshirish talab etiladi.

Maqolada modul belgisi ostida qatnashgan chiziqli ifodalar yig'indisidan tashkil topgan tenglamalar mazkur tenglamadan hosil qilingan funksiyaning xossasidan foydalanib yechish usullari keltirilgan.

Ta'rif. $\sum_{k=1}^n a_k |b_k x + c_k| + dx + c = 0$ ko'rinishdagi tenglamalar chiziqli modulli

tenglamalar deyiladi.

Yuqoridagi misoldan ko'rinib turibdiki oraliq usulida tenglamada qo'shiluvchilar soni ortganida oraliqlar soni ham ortib boradi. Bunday tenglamalarni funksiya grafigi yordamida yechish o'quvchini vaqtini tejaydi, avvaldan tenglama yechimga ega bo'lgan oraliqlarni aniqlash va tenglama yechimga ega bo'ladigan oraliqlarda tenglamani yechish talab qilinadi.

Bu tenglamalarni yechish uchun quyidagi ko'rinishdagi

$$y = \sum_{k=1}^n a_k |b_k x + c_k| + dx + c \quad (1)$$

funksiyalarning nollarini topishdan foydalanamiz.

Ta'rif. (1) funksiyaning modul belgisi ostidagi har bir ifodani nolga tenglashdan hosil bo'lgan X ning qiymatlarini funksiyaning tugun nuqtasi deb aytiladi. $x_i = -\frac{c_i}{b_i}$. $\min\{x_i\} = a$ va $\max\{x_i\} = b$ deb belgilasak, a va b nuqtalarni chegaraviy nuqtalar deb ataymiz.

Chegaraviy nuqtalardan chap va o'ng tomonda ikkita ixtiyoriy nuqta olamiz $x' < a$ va $b < x''$ va bu x' va x'' nuqtalarni qo'shimcha nuqtalar deb ataymiz.

A, B, C va D lar X ning chiziqli ifodalari bo'lsin.

1. Agar funksiya $y = |A|$ bo'lsa, $A = 0$ tenglamaning yechimi tugun nuqta bo'ladi.

2. Agar funksiya $y = |A| \pm |B|$ bo'lsa, $A = 0$ va $B = 0$ tenglamalarning yechimlari tugun nuqta bo'ladi.

3. Agar funksiya $y = ||A| - |B||$ bo'lsa, $A = 0$, $B = 0$ va $|A| - |B| = 0$ tenglamalarning yechimi tugun nuqtalar bo'ladi.

4. Agar funksiya $y = ||A| - |B|| + ||C| - |D||$ bo'lsa, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $|A| - |B| = 0$ va $|C| - |D| = 0$ tenglamalarning yechimi tugun nuqtalar bo'ladi.

5. Agar funksiya $y = ||A| \pm |B| \pm |C|$ bo'lsa, $A = 0$, $|A| \pm B = 0$ va $||A| \pm B| \pm C = 0$ tenglamalarning yechimi tugun nuqtalar bo'ladi.

2-misol. $y = |x - 1| + |x - 5|$ funksiya berilan bo'lsin, bu erda $A = x - 1$ va $B = x - 5$. Funkning tugun nuqtalari $x - 1 = 0$ va $x - 5 = 0$ tenglamalarning yechimlari bo'ladi. ($x = 1$ va $x = 5$)

3-misol. $y = ||x - 1| - 3| - 5|$ funksiya berilan bo'lsin.

Berilgan funksiyaning tugun nuqtasi: $x-1=0$ ($x=1$), $|x-1|-3=0$ ($x=-2$ va $x=4$) va $||x-1|-3|-5=0$ ($x=-7$ va $x=9$) tenglamalarning yechimlari bo'ladi. Demak $x=1$, $x=-2$, $x=4$, $x=-7$ va $x=9$ nuqtalar funksiyaning tugun nuqtalari bo'ladi.

(1) ko'rinishda berilgan funksiyaning grafigini chizish uchun funksiyaning tugun nuqtalari va bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari juftligi $(x_i; y(x_i))$ aniqlanadi va Dekart koordinatalar tekisligida tasvirlanadi. Bizga berilgan funksiya chiziqli ifodalar yig'indisi bo'lganligi sabab, har bir intervalda ularning yig'indisi chiziqli funksiya bo'ladi. Shuning uchun funksiya grafi tugun nuqtalarni ketma-ket tutushtirishdan tashkil topgan siniq chiziqdan iborat bo'ladi.

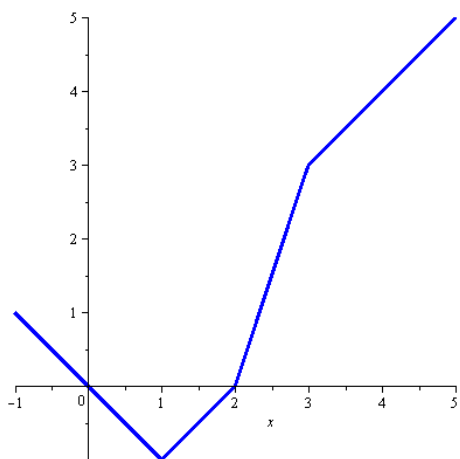
4-misol. $y = |x-1| + |x-2| - |x-3|$ funksiya grafigini quring.

Berilgan funksiyaning tugun nuqtasi: $x=1$, $x=2$, $x=3$. Ikki ixtiyoriy qo'shimcha nuqta olamiz: $x'=-1$ va $x''=5$.

Bu nuqtalarda funksiyaning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$y(-1)=1, y(1)=-1, y(2)=0, y(3)=3 \text{ va } y(5)=5.$$

Olingan qiymatlarni Dekart koordinatalar sistemasida belgilab chiqamiz va bu nuqtalarni birlashtirib funksiya grafigini chizamiz:



5-misol. $y = ||2x-1| - |x-3||$ funksiya grafigini quring.

Funksiyaning tugun nuqtalarini topamiz:

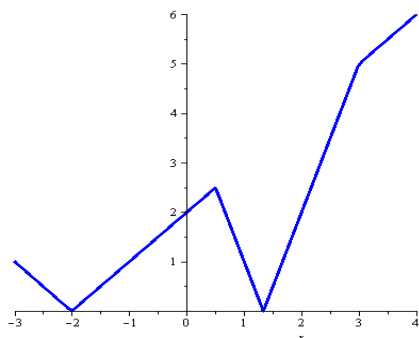
$2x-1=0$, $x-3=0$ va $|2x-1|-|x-3|=0$ tenglamalarni yechamiz. Bundan funksiyaning tugun nuqtasi: $x=\frac{1}{2}$, $x=3$, $x=\frac{4}{3}$ va $x=-2$. $\min\{x_i\}=-2$

va $\max\{x_i\}=3$ bo'lgani uchun ixtiyoriy qo'shimcha nuqtani olamiz: $x'=-3$ va $x''=4$.

Bu nuqtalarda funksiyaning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$y\left(\frac{1}{2}\right)=2,5, y(3)=5, y\left(\frac{4}{3}\right)=0, y(-2)=0, y(-3)=1 \text{ va } y(4)=6.$$

Olingan qiymatlarni Dekart koordinatalar sistemasida belgilab chiqamiz va bu nuqtalarni birlashtirib funksiya grafigini chizamiz:



6-misol. $||2x-2| - |3x-9||=5$ tenglamaning nechta ildizi bor.

Berilgan tenglamani yechish uchun $y = ||2x-2| - |3x-9||$ va $y=5$ funksiyalarning grafiklarini quramiz.

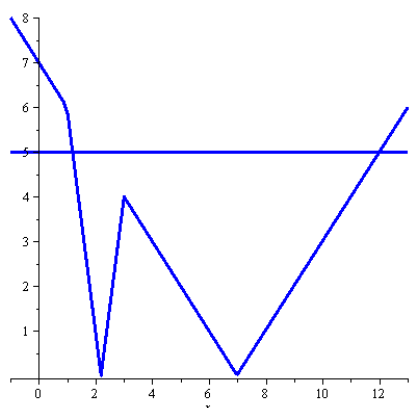
$y = ||2x-2| - |3x-9||$ funksiyaning tugun nuqtalarini topamiz: $x=1$, $x=3$, $x=2,2$ va $x=7$.

$\min\{x_i\}=1$ va $\max\{x_i\}=7$ bo'lgani uchun ixtiyoriy qo'shimcha nuqtani uchun $x'=-1$ va $x''=12$ nuqtalarni olamishimiz mumkin.

Bu nuqtalarda funktsiyaning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$y(1)=6, y(3)=4, y(2,2)=0, y(7)=0, y(-1)=8 \text{ va } y(12)=5.$$

Endi olingan qiymatlarga Dekart koordinatalar sistemasida belgilab chiqamiz va bu nuqtalarni birlashtirib $y=|2x-2|-|3x-9|$ funktsiyaning grafigini va $y=5$ funktsiya grafigini bitta koordinata tekisligida chizamiz:



Demak, grafikdan ko'rinib turibdiki, $y=|2x-2|-|3x-9|$ va $y=5$ funktsiyalar ikkita nuqtada kesishadi. Shu sababli berilgan tenglama 2 ta ildizga ega.

7-misol. $|x-1|-|x-2|+|x+1|=|x+2|+|x|-3$ tenglamani yeching.

Yechish: Odatiy usulda yechilishi. Modul ichida turgan har bir ifodani nolga tenglab, tugun nuqtalarini topamiz: $x=-2$; $x=-1$; $x=0$; $x=1$; $x=2$. Ular sonlar o'qini $(-\infty; -2)$, $[-2; -1)$, $[-1; 0)$, $[0; 1)$, $[1; 2)$, $[2; +\infty)$ oraliqlarga

ajratadi. Berilgan tenglamani shu oraliqlarning har birida yechamiz. Qulaylik uchun ushbu ishora jadvalini tuzib olaylik:

oraliq Ifoda	$(-\infty; -2)$	$[-2; -1)$	$[-1; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; +\infty)$
$x+2$	< 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0
$x+1$	< 0	< 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0
x	< 0	< 0	< 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0
$x-1$	< 0	< 0	< 0	< 0	≥ 0	≥ 0
$x-2$	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0	≥ 0

1) $x < -2$ bo'lsa, $(1-x)-(2-x)+(-x-1)=(-x-2)+(-x)-3$ tenglamaga egamiz. Uning $x < -2$ ni qanoatlantiruvchi yechimi: $x = -3$;

2) $-2 \leq x < -1$ bo'lsa, $(1-x)-(2-x)+(-x-1)=x+2-x-3$ tenglama hosil bo'ladi. Uning $[-2; -1)$ dagi yechimi: $x = -1$;

3) $-1 \leq x < 0$ bo'lsa, $(1-x)-(2-x)+(x+1)=x+2-x-3$ tenglama hosil bo'ladi. Uning $[-1; 0)$ dagi yechimi: $x = -1$;

4) $0 \leq x < 1$ bo'lsa, $(1-x)-(2-x)+(x+1)=(x+2)+x-3$ tenglama hosil bo'ladi. Uning $0 \leq x < 1$ dagi yechimi: $x = 1$;

5) $1 \leq x < 2$ bo'lsa, $(x-1)-(2-x)+(x+1)=(x+2)+x-3$ tenglamaga ega bo'lamiz. Uning $[1; 2)$ dagi yechimlari: $x = 1$.

6) $x \geq 2$ bo'lsa, $(x-1)-(x-2)+(x+1)=(x+2)+x-3$ tenglama hosil bo'ladi. $[2; +\infty)$ oraliqda bu tenglamani yechimi: $x = 3$.

Grafik usulda yechilishi. Tenglamani yechish uchun uning barcha hadlarini tenglikning bir tomoniga o'tkazamiz:

$$|x-1|-|x-2|+|x+1|-|x+2|-|x|+3=0.$$

Bu tenglamaning yechimi

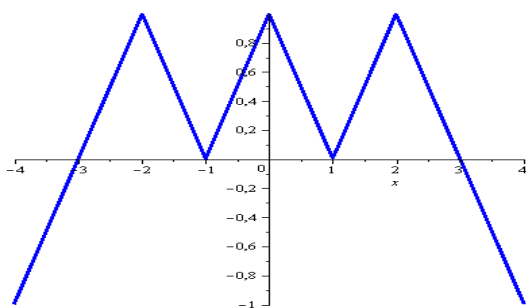
$$f(x)=|x-1|-|x-2|+|x+1|-|x+2|-|x|+3$$

funksiyaning nollaridan iborat.

Modul ichida turgan har bir ifodani nolga tenglab, $x=-2$; $x=-1$; $x=0$; $x=1$; $x=2$ tugun nuqtalarni topamiz va qo'shimcha nuqtani uchun $x'=-4$ va $x''=4$ nuqtalarni olamishimiz mumkin.

Funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini aniqlaymiz va funksiyani qiymatlar jadvalini tuzamiz.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$	-1	+1	0	+1	0	+1	-1



Jadval va funksiya grafigidan ko'rib turganimizdek funksiya $f(-1)=0$ va $f(1)=0$ bo'lgani uchun $x=1$ va $x=-1$ berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi. Funksiya $(-\infty; -2)$ va $[2; +\infty)$ oraliqlarda o'z ishorasini almashtirgani uchun shu oraliqlarda funksiya Ox o'qini kesib o'tadi va nollari mavjud.

1) $x < -2$ bo'lsa, $(1-x)-(2-x)+(-x-1)=(-x-2)+(-x)-3$ tenglamaga egamiz. Uning $x < -2$ ni qanoatlantiruvchi yechimi: $x = -3$;

2) $x \geq 2$ bo'lsa, $(x-1)-(x-2)+(x+1)=(x+2)+x-3$ tenglama hosil bo'ladi. $[2; +\infty)$ oraliqda bu tenglamani yechimi: $x = 3$;

8-misol. $\|x-2|-|x-3|\|-\|x-1|-|x-7|\|=|x-3|+2$ tenglamani yeching.

Grafik usulda yechilishi: Tenglamani yechish uchun har bir modulni nolga aylantiruvchi x ning qiymatlarini topamiz: 1, 2, 3, 7. Bundan tashqari $\|x-2|-|x-3|\|=0$ dan $x=2,5$ va $\|x-1|-|x-7|\|=0$ dan $x=4$ ni olamiz. Qo'shimcha nuqtani uchun $x'=0$ va $x''=8$ nuqtalarni olamishimiz mumkin.

Berilgan tenglamadan quyidagi funksiyani hosil qilamiz:

$$f(x)=\|x-2|-|x-3|\|-\|x-1|-|x-7|\|-|x-3|-2.$$

Yuqorida aniqlangan x lar uchun funksiyani qiymatlar jadvalini tuzamiz.

x	0	1	2	2,5	3	4	7	8
$f(x)$	-10	-9	-6	-6,5	-5	-2	-10	-12

Funksiyaning qiymatlari jadvalidan ko'rinib turibdiki xar bir oraliqda funksiya ishorasi manfiy. Bu funksiya Ox o'qini kesib o'tmaydi. Tenglama yechimga ega emas.

Maqolada mazkur turdagi masalalarni yechishni o'quvchilarga o'rgatishda tenglama umumiy ko'rinishda berilib, modul ostidagi ifodani ishorasi o'zgarmaydigan sohalarga ajratish, ya'ni tugun nuqtalarini topish va tugun nuqtalarda funksiyaning ishorasi almashinuvchi oraliqlarda tenglamani yechish tavsiya qilingan.

Ushbu masalalarni o'rganish o'quvchilarga matematik kompetensiyasini rivojlantirish, masalalarni yechishda mustaqil ravish fikrlash, mulohaza qilish imkoniyatini beradigan bilim, ko'nikma va malakalarga ega bo'lish imkonini beradi. Bundan tashqari, o'rganilgan usullar o'quvchilarning kelgusida modul qatnashgan tenglama va tengsizliklarni yechishda, tahlil qilishlari va o'rganishlariga yordam beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Abduhamidov A.U., Nasimov X.A., Nosirov U.M., Husanov J.H. "Algebra va matematikanaliz asoslari". I qism. Akademik litseylar uchun darslik. – T.: 2008y.
2. Mirzaahmedov va boshqalar. Tenglama va tengsizliklarni yechish. – T.: "O'qituvchi", 1993y.
3. X.P. Расулов, С.Ж. Собиров "Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари". "Science and Education" Scientific Journal September 2021 / Volume 2 Issue 9.
4. N. Naqiyev Modul qatnashgan tenglama va tengsizliklarni son o'qi yordamida yechish. "Fizika, matematika va informatika" ilmiy – uslubiy jurnal. Toshkent – 2008. 5-son. 39-44 bet.