



UNIVERSAL XALQARO ILMIY JURNAL

Jurnalning bosh sahifasi: <https://universaljurnal.uz>

Universal International Scientific
Journal

e-ISSN: [3060-4540 \(online\)](https://universaljurnal.uz)

Year: 2025 Issue: 2 Volume: 1

Published: 05.01.2025
<https://universaljurnal.uz>



International indexes

GOOGLE SCHOLAR

CROSSREF (OAK BAZA)

ZENODO

OPEN AIRE

EUROPUB

RESEARCHGATE (OAK BAZA)

SJIF

MATEMATIK MAYATNIKNI KICHIK VA KATTA BURCHAKLARDA DAVRLAR ORASIDAGI FARQLARNI TAQQOSLASH

**Xudoyberdiyeva Malika Karomat qizi^a, Bo'ronov Musobek Orifovich^b,
Muxammadjonov Abdul Aziz^d**

^(a)O'zbekiston Milliy Universiteti., Fizika fakulteti katta o'qituvchisi, PhD

^(b)O'zbekiston Milliy Universiteti., Fizika fakulteti 1-kurs talabasi

^(d)O'zbekiston Milliy Universiteti., Fizika fakulteti 4-kurs talabasi

Uzbekistan

xudoyberdiyeva94@inbox.ru

<https://orcid.org/0009-0006-8812-5028>

Annotatsiya: Kichik burchakka og`dirilgan mayatniklar uchun, kichik burchaklarni soddalashtirish foydali bo'lsa-da, katta burchakli mayatniklar uchun bu yondashuv ishlamaydi va oddiy mayatniklarni hisoblash modellarida katta muammolarga olib kelishi mumkin. Ushbu maqola kichik burchakli va katta burchakli mayatniklarning tebranish davrlari orasidagi farqlarni o'rganadi hamda ikkala modeldagi davrni tabiatning asosiy qonunlaridan keltirib chiqarishni ko'rsatadi. Shuningdek, ushbu maqola fizik hodisalardan elliptik integralni chiqarishning umumiy usulini taqdim etadi. Nihoyat, maqola matematik mayatniklarni o'rganishni kengaytirish uchun bir qator takliflarni ilgari suradi. Mazkur maqola qat'iy matematik isbot sifatida mo'ljallanmagan bo'lsa-da, mayatniklarning aniq davrlarini chiqarishni yoritishga va ushbu jarayonga bog'liq matematikani batafsil tushuntirishga qaratilgan.

Kalit soʻzlar: mayatnik, davr, burchak, matematik mayatnik.

Аннотация: Для маятников, наклоненных под малыми углами, хотя упрощения на малые углы полезны, для маятников с большими углами этот подход не работает и может привести к серьезным проблемам в вычислительных моделях простых маятников. В данной статье исследуются различия между периодами колебаний малоугловых и большеугловых маятников и показано, как вывести период в обеих моделях из фундаментальных законов природы. Кроме того, в этой статье представлен общий метод вывода эллиптического интеграла из физических явлений. Наконец, в статье дается ряд предложений по расширению изучения математических маятников. Хотя эта статья не задумана как строгое математическое доказательство, она призвана пролить свет на вывод точных периодов маятников и подробно объяснить математику, задействованную в этом процессе.

Ключевые слова: маятник, период, угол, математический маятник.

Abstract: For pendulums tilted at small angles, although small-angle simplifications are useful, for large-angle pendulums this approach does not work and can lead to major problems in computational models of simple pendulums. This article explores the differences between the periods of oscillation of small-angle and large-angle pendulums and shows how to derive the period in both models from the fundamental laws of nature. Also, this paper presents a general method for deriving the elliptic integral from physical phenomena. Finally, the article makes a number of suggestions for expanding the study of mathematical pendulums. Although this article is not intended as a rigorous mathematical proof, it is intended to shed light on the derivation of the exact periods of pendulums and to explain in detail the mathematics involved in this process.

Keywords: pendulum, period, angle, mathematical pendulum.

Language: Uzbek

Citation: Khudoyberdiyeva , M., Boronov , M., & Mukhammadjonov , A. A. (2025). COMPARISON OF THE DIFFERENCES BETWEEN THE PERIODS OF A MATHEMATICAL PENDULUM AT SMALL AND LARGE ANGLES. Universal International Scientific Journal, 2(1), 11–22. <https://doi.org/10.69891/3060-4540.2025.78.33.001>

Doi: <https://doi.org/10.5281/zenodo.14636182>

Google scholar: <https://inlibrary.uz/index.php/universaljournal/article/view/60750>

Crosreff doi: <https://doi.org/10.69891/3060-4540.2025.78.33.001>

I. Kirish

Matematik mayatniklar faqat bir uchi mustahkamlangan ip va boshqa uchiga biriktirilgan yukdan iborat. Ular qoʻyib

yuborilganda tebranadi. Mayatniklarni birinchi oʻrganganlardan biri boʻlgan Galileo Galiley ularning harakati ogʻish burchakka bogʻliq emasligini aniqlagan. U mayatniklar

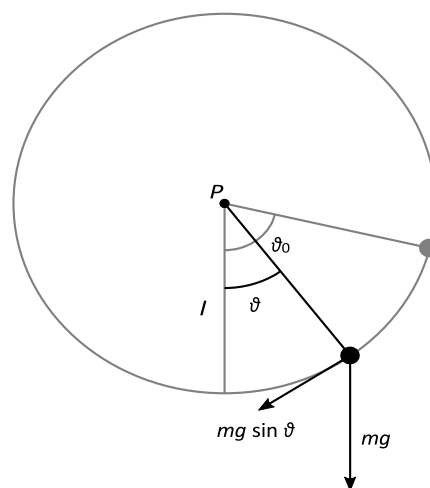
tebranishini kuzatish jarayonida mayatniklar maksimal burchak og'ishiga nisbatan izoxronik ekanligini ko'rgan: ya'ni, mayatnikning tebranishi davomida vertikalga nisbatan qanday burchak hosil qilishidan qat'iy nazar, uning davri har doim bir xil bo'ladi.

Agar bu haqiqat bo'lsa, unda mayatniklar garmonik harakatni namoyon qiladi, bu harakatda mexanik sistemani muvozanatga qaytaruvchi kuch, muvozanat vaziyatidan og'ish burchagiga mos bo'ladi. Galileo kuzatuvidan beri mayatniklar vaqtni o'lchash va umuman ilm-fanda yirik yutuqlarga olib kelgan, boshqa tarafdin esa Yerning bir kunda bir marta aylanishini isbotlagan.

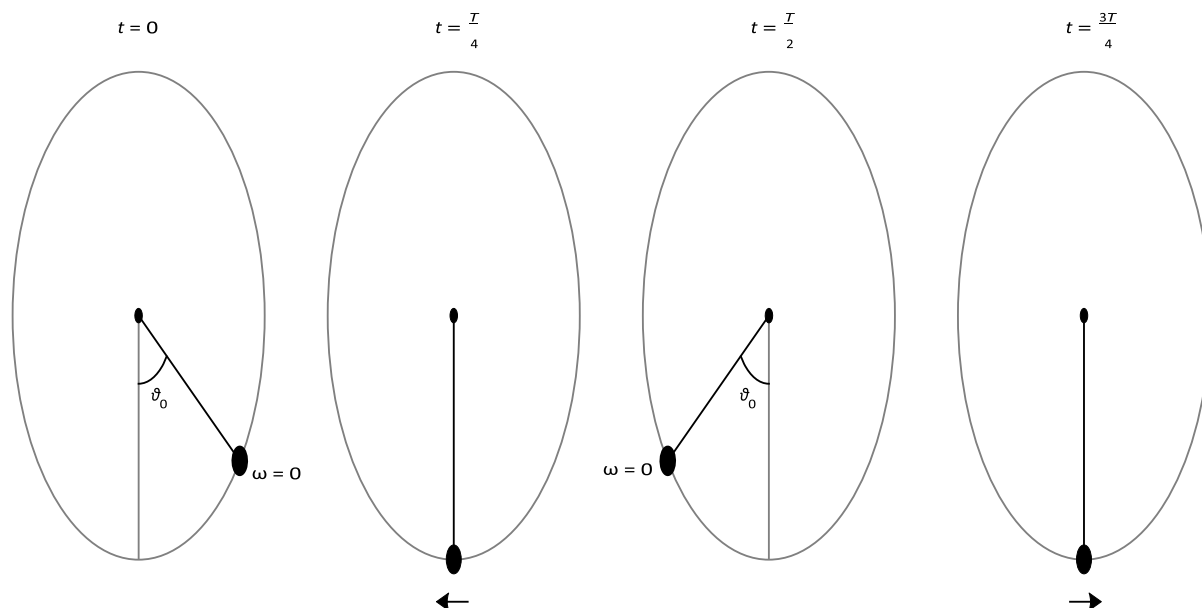
O'rta maktab fizikasi kurslarida mayatniklarni izoxronik deb hisoblashni o'rganamiz. Ularning harakatini modellashtrishda Galileo taxminiga amal qilamiz va mayatnikning davrini hisoblashda og'ish burchagini hisobga olmaymiz. Darhaqiqat, maktabning dastlabki yillarida bu natijalarni o'zimiz ham topa olamiz. Masalan, men beshinchi sinfda ipga bog'langan yuvish mashinasi yuvgichlarining tebranish vaqtlarini o'lchab, oxir-oqibat Galileo bilan bir xil xulosaga kelganimni eslayman. Hayratlanarlisi shundaki, aslida Galileo xato qilgan: mayatnikning maksimal og'ish burchagi uning tebranish davriga ta'sir qiladi. Nisbatan kichik maksimal og'ishlarga ega mayatniklar amalda izoxronik bo'lsa-da, bu taxmin bilan bog'liq xatolik burchak kattalashgani sari ortib boradi.

Ushbu tadqiqotning maqsadi Galileo taxmini qaysi holatlarda to'g'ri va noto'g'ri ekanligini tahlil qilishdir. Mayatniklarning harakatini asosiy qonunlaridan ikkinchi tartibli differensial tenglama hosil qilish orqali

— biri taxminiy davrni, ikkinchisi esa aniq davrni ifodalaydi — va ularni solishtirish orqali taqribiy hisoblash bilan bog'liq xatoliklarni aniqlash mumkin. Bu juda muhim, chunki matematik mayatnikning harakati davriy bo'lganligi sababli, modellashtrishda davr vaqtidagi har qanday kichik farq bir necha tebranishdan keyin katta xatoliklarga olib kelishi mumkin. Bu differensial tenglamalarni yechgandan so'ng, kichik burchak taxminidan nima uchun foydalanilishini ham o'rganishimiz mumkin. Bu muammoni hal qilish qiyinligiga haqiqatan ham ta'sir qiladimi? Agar davrning aniq yechimi ishlatishga qulay bo'lsa, unda taqribiy hisoblash o'rniga shu aniq yechimdan foydalanish kerak. Agar taqribiy hisoblash juda katta xatolik keltirib chiqarmasa va ishlatish ancha oson bo'lsa, undan foydalanish mantiqiydir. Eng asosiysi, ushbu tadqiqot fizika bo'yicha biz erta bosqichlarda o'rgangan umumiy bilimni o'rganish va uning qanchalik noto'g'ri ekanligini aniqlashga qaratilgan.



1-rasm. Matematik mayatnik ko'rinishi.



2-rasm. Erkin matematik mayatnikning davriy tebranish harakati. ω — burchak tezlik, shuning uchun $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

MATEMATIK MAYATNIKLARNI MODELLASHTIRISH

Matematik mayatnik l uzunligi bo'lgan va vaznga ega bo'lmagan ipga osilgan, massasi m bo'lgan va moddiy nuqta deb qarash mumkin bo'lgan yukdan iborat (1-rasmda ko'rsatilgan). Jismga pastga qaragan yo'nalishda g tezlanishi bo'lgan gravitatsion tortishish kuchi ta'sir qiladi. Mayatnik erkin tebranadi va maksimal og'ish burchagidan qo'yib yuborilganda $\theta = \theta_0$ dan $\theta = -\theta_0$ gacha tebranish harakatini amalga oshiradi. Bu harakat 2-rasmda ko'rsatilgan va davriy xarakterga ega: bir to'liq tebranib boshlang'ich holatga qaytishi uchun T vaqt talab etadi.

Nyuton qonunlarining qo'llanilishi
Mayatnikning harakati Nyuton qonunlarining aylanma harakatga tatbiq etilishiga asoslanadi:

$$M = I\alpha \quad (1)$$

bu yerda M — kuch momenti, I — inersiya momenti, α — burchak tezlanish. Kuch momenti aylantiruvchi kuchning o'lchovi bo'lib, uni "burilish" deb ham atash mumkin. Jismning inersiya momenti-jismni aylanma harakatga keltirish qanchalik qiyin ekanligini xarakterlaydi. Bu massa analogi hisoblanadi: massa kuchga qanday bog'liq bo'lsa, inersiya momenti kuch momentiga shunday bog'liq. Burchak tezlanishi esa mayatnikning burchak tezligining vaqt bo'yicha o'zgarishidir. Aylanish o'qiga nisbatan kuch momenti quyidagicha

ifodalanadi:

$$M = F * r \quad (1)$$

bu yerda F — kuch aylanish o'qidan r masofada jismga tasir qiladi. Ushbu holatda $r = l$ va $F = mg \sin \theta$, ya'ni og'irlik kuchining ipga perpendikulyar qismi. Bu kuchni umumiy og'irlik kuchini parallel va perpendikulyar qismlarga ajratish orqali topish mumkin, bu esa vektor ustidagi algebraik amallar yordamida amalga oshiriladi. Bu holat fizikada keng qo'llaniladi. Ushbu holatdan, $F = mg \sin \theta$ natijasi olinadi: perpendikulyar kuch – og'irlik kuchi mg va $\sin \theta$ ko'paytmasidan iborat.(1)-Formulaning o'ng tomoniga o'tar ekanmiz, mayatnikning inersiya momentini aniqlashimiz kerak. Inersiya momenti istalgan jismdagi har bir nuqta uchun $I = \sum mr^2$ formula orqali topiladi. Bizning mayatnikimizda massa faqatgina bir nuqtada, ya'ni og'irlik markazida to'plangan, shuning uchun yig'indida faqat bitta qo'shiluvchi mavjud. Shunday qilib, $I = ml^2$.

Kuch momenti va inersiya momentining ushbu yangi tenglamalarini birlashtirib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$-lmg \sin \theta = ml^2 \alpha \quad (2)$$

Keyin esa tenglamani soddalashtirib, quyidagi natijaga ega bo'lamiz:

$$-\frac{g}{l} \sin \theta = \alpha \quad (3)$$

Soddalashtirish uchun $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ deb

belgilaymiz. Keyin, burchak tezlanishi vaqt bo'yicha og'irish burchagining ikkinchi tartibli hosilasi ekanligini hisobga olib, $\alpha = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ deb yozamiz. Soddalashtirib, matematik mayatnikning harakatini ifodalovchi differensial tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin \theta \quad (4)$$

Shunday qilib, mayatnikning harakati faqatgina ipning uzunligi l , gravitatsion tezlanish g , va mayatnikning vertikal o'qi bilan hosil qilgan burchagi - θ ga bog'liq bo'ladi.

Kichik burchakli mayatniklar

Agar mayatnikning boshlang'ich burchagi θ_0 juda kichik bo'lsa, unda $\sin \theta \approx \theta$ deb qabul qilinadi. Bu kichik burchaklarni taqribiy hisoblash deb ataladi va shuning uchun bunday mayatniklar "kichik burchakli mayatnik deb nomlanadi. Ushbu taxminni asoslash uchun birinchi ajoyib limitdan foydalanamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (5)$$

Shunday qilib, $x \rightarrow 0$ da, $\sin x = x$, va shu sababli $\sin x \approx x$. Ushbu taqribiy hisoblash differensial tenglamani (4) soddalashtirish uchun qo'llaniladi:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} \approx -\omega^2 \theta \quad (6)$$

Tenglama (4) tenglamasga qaraganda ancha sodda bo'lib, u matematik mayatnikning tebranish davrini topish

uchun ishlatiladi.

Ushbu differensial tenglamani yechish uchun avvalo shuni ta'kidlaymizki, ikkinchi tartibli hosilasi $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, shu funksiya o'zi va o'zgarmas $-\omega^2$ son ko'paytmasiga teng bo'layapti. Ushbu tenglama ikkinchi tartibli chiziqli gomogen differensial tenglama deb ataladi. Bir necha marotaba hosila olganda ham o'ziga qaytovchi funksiyalar eksponensial funksiyalar hisoblanadi:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

Endi $\theta = e^{i\omega t}$ deb qabul qilamiz va birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$\theta = e^{i\omega t} \quad (7)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = i\omega e^{i\omega t} \quad (8)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 \theta \quad (9)$$

Shunday qilib, $\theta_1 = C_1 e^{i\omega t}$ ikkinchi tartibli differensial tenglama (6) uchun yechim bo'ladi, bu yerda $C_1 \in \mathbb{C}$. Shuningdek, $\theta_2 = C_2 e^{-i\omega t}$ ham yechimdir, bu yerda $C_2 \in \mathbb{C}$. Differensiallash jarayonida C_1 va C_2 doimiy koeffitsiyentlari saqlanadi va ular integrallashning zaruriy doimiylaridir. Ushbu doimiylar (6) tenglama uchun matematik mayatnikning dastlabki xususiyatlariga bog'liq holda cheksiz ko'p yechimlarni ifodalaydi:

$$\theta = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (10)$$

Bir marta hosila olish orqali quyidagini ko'rish mumkin:

$$\frac{d\theta}{dt} = C_1 i\omega e^{i\omega t} - C_2 i\omega e^{-i\omega t} \quad (11)$$

Va yana bir marta hosila olsak:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C_1 \omega^2 e^{i\omega t} + C_2 \omega^2 e^{-i\omega t} = -\omega^2 (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \theta \quad (12)$$

Shunday qilib, (12) tenglama (6) tenglamani qanoatlantiradi va masalaning barcha bo'lishi mumkin bo'lgan yechimlarini o'z ichiga oladi.

Eyler formulasi $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ni umumiy yechimga qo'llash orqali quyidagini hosil qilamiz:

$$\theta = C_1 \cos \omega t + C_1 i \sin \omega t + C_2 \cos(-\omega t) + C_2 i \sin(-\omega t) \quad (13)$$

$$\sin(-\theta) = \sin \theta \text{ va } \cos(-\theta) = \cos \theta \text{ bo'lganligi uchun :}$$

$$\theta = C_1 \cos \omega t + C_1 i \sin \omega t + C_2 \cos(\omega t) - C_2 i \sin(\omega t) \quad (14)$$

Endi ifodalarni tartibga keltiradigan bo'lsak:

$$\theta = (C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t \quad (15)$$

Keyin $A = C_1 + C_2$ va $B = i(C_1 - C_2)$ deb belgilaymiz:

$$\theta = A \cos \omega t + B \sin(\omega t) \quad (16)$$

Bu yerda $A, B \in \mathbb{R}$ bo'lib, ular matematik mayatnikning dastlabki holatlarini aniqlovchi doimiylardir. θ davriy funksiyalarning chiziqli

kombinatsiyasi bo'lib, u ham davriydir. $\cos \omega t$ va $\sin \omega t$ funksiyalarining davri esa $\frac{2\pi}{\omega}$. Shu davrga ega ikki davriy funktsiyani qo'shish natijasida yana shu davrga ega davriy funktsiya hosil bo'ladi. Shuning uchun kichik burchak uchun qilingan taqribiy hisoblashlardan so'ng matematik mayatnikning tebranish davri quyidagicha bo'ladi:

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (17)$$

Keltirib chiqargan formulamiz faqatgina kichik og'ish burchaklarida o'rinli, katta og'ish burchaklarida emas. Bu Galileyning kirish qismida keltirilgan kuzatuvlariga mos keladi.

KATTA BURCHAKLI MAYATNIKLAR

Biroq, agar mayatnikning boshlang'ich og'ish burchagi θ_0 katta bo'lsa, kichik burchaklar uchun qilingan taqribiy hisoblashlarni qo'llab bo'lmaydi. Bunday mayatnik—katta burchakli mayatnik—davrini aniqlash uchun (4) tenglamani taqribiy hisoblashlarsiz yechishimiz kerak. Ikkinchi tartibli differensial tenglamani integrallash uchun quyidagiga e'tibor bering:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{d\theta}{dt} \quad (18)$$

Tenglamani o'ng tomonidan integral oladigan bo'lsak:

$$\int \frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + C, \quad (19)$$

Bu integralni masalamizga qo'llash uchun dastlabki differensial tenglamani (4), $\frac{d\theta}{dt}$ ga ko'paytiramiz:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{d\theta}{dt} = -\omega^2 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (20)$$

Tenglamani chap qismi, (18) tenglamani bir qismidir. t bo'yicha integral olsak:

$$\int \frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{d\theta}{dt} dt = \int -\omega^2 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} dt \quad (21)$$

Differensial tenglama quyidagi holga keladi:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \omega^2 \cos \theta + C, \quad (22)$$

Qayerda C qatnashgan bo'lsa, u integralni hisoblashda hosil bo'ladigan o'zgarmas son. $\theta = \theta_0$ bo'lganda $\frac{d\theta}{dt} = 0$ bo'ladi. Shu sababli $C = -\omega^2 \cos \theta_0$ ekanligini topib tenglamaga keltirib qo'ysak:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \omega^2 \cos \theta - \omega^2 \cos \theta_0, \quad (23)$$

Tenglamani soddalashtirsak:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} \quad (24)$$

Bu nuqtada, dastlabki ikkinchi tartibli differensial tenglama birinchi tartibli differensial tenglamaga aylantirildi. Biroq,

bu hali ham matematik mayatnikning tebranish davrini aniq ko'rsatish uchun yetarli emas.

Davom etishdan oldin, ba'zi narsalarni o'zimizga qayd qilib olishimiz kerak. Sinusning yarim burchak formulasi:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad (25)$$

Bu tenglikni yana quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\cos \theta = 1 - 2 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \quad (26)$$

$\cos \theta = 1 - 2 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2$ va $\cos \theta_0 = 1 - 2 \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)^2$ tengliklarni, (24) ga qo'yish orqali quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\omega \sqrt{\left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)^2 - \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2} \quad (27)$$

Endi $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$ deb belgilaymiz (bu o'zgarmas), va o'rniga qo'yamiz:

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\omega \sqrt{k^2 - \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2} \quad (28)$$

Keyingi qadamda, (28) ning teskari qiymatini olib θ bo'yicha integrallash uchun tayyorlaymiz:

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2\omega \sqrt{k^2 - \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2}} \quad (29)$$

Chap tomonda 0 dan $\frac{T}{4}$ gacha va o'ng tomonda 0 dan θ_0 gacha integrallashni bajaramiz, chunki matematik mayatnik muvozanat vaziyatidan uning maksimal burchak og'uncha ketgan vaqt $\frac{T}{4}$ ga teng bo'ladi. Shu sababli, bu integral quyidagiga teng bo'ladi:

$$\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{2\omega \sqrt{k^2 - \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2}} \quad (30)$$

Chap tomonni integrallab, o'ng tomondagi ifodalarni soda holatga keltiramiz:

$$T = \frac{2}{\omega} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2}} \quad (31)$$

Shunday qilib, biz matematik mayatnikning davrini (4) differensial tenglamadan topdik. Bu davr mayatnik ip uzunligi l ga, erkin tushish tezlanishi g ga va mayatnikning maksimal og'ish burchagi θ_0 ga bog'liq. Qiziqarli tomoni shundaki, (31) integral birinchi turdagi elliptik integral sifatida tanilgan va u kriptografiya sohasida nihoyatda muhim. Elliptik integralning teskari funksiyalari elliptik funksiyalar deb ataladi va ular mayatniklardan tashqari ko'plab qo'llanmalarga ega. Elliptik integrallar aniq yechimlarga ega emasligi isbotlangan va ularni faqat sonli usullar bilan integrallash mumkin.

KICHIK BURCHAKLAR

UCHUN TAQRIBIY HISOBLASHNING XATOLIGINI BAHOLASH

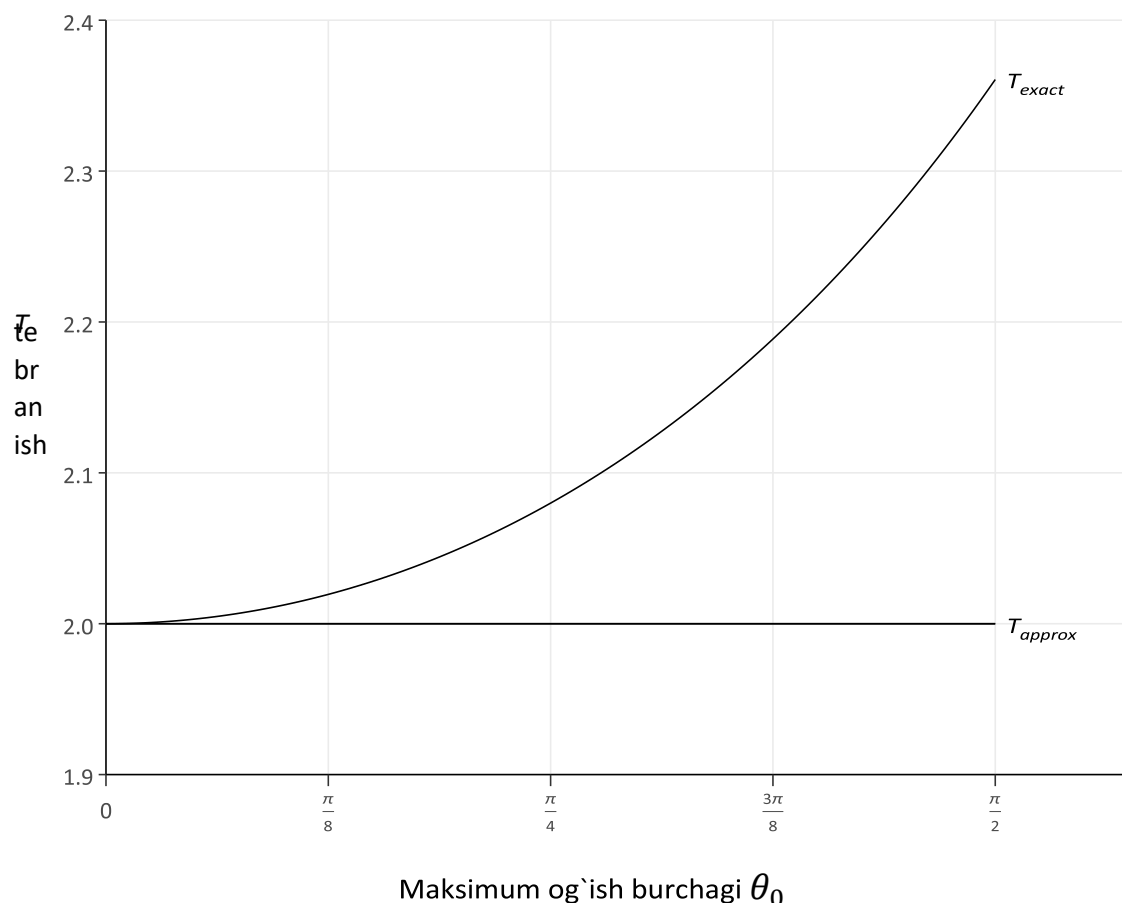
Oldingi ikki bo‘limda biz matematik mayatnikning tebranish davri uchun ikki xil ifodani topdik: ulardan biri kichik burchaklar uchun:

$$T(g, l) \approx T_{taq} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (32)$$

Ikkinchisi esa aniq integral bilan ifodalanadi:

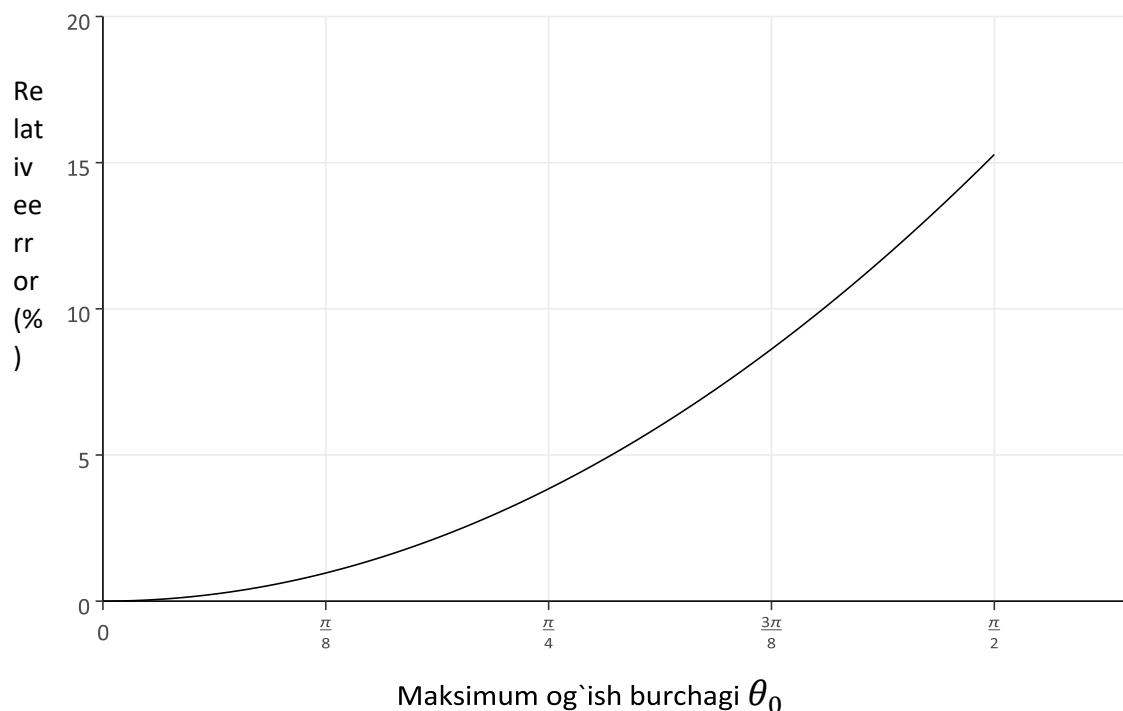
$$T(g, l, \theta_0) = T_{aniq} = \frac{2}{\omega} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2}}$$

(33) Ikki usul bo‘yicha matematik mayatnikning tebranish davri (32) va (33) tenglamalari matematik mayatniklarni modellashtirishda keltirilgan doimiylar asosida sonli hisoblash orqali aniqlanishi mumkin. Har ikkala tenglamada gravitatsion tezlanish g va mayatnik uzunligi l funksiyalari bo‘lsa-da, faqat aniq davr maksimal og‘ish burchagi funksiyasi hisoblanadi.



3-rasm. Matematik mayatnikning aniq va taqribiy davrlari. Bu yerda $\omega = \pi$ holati ko‘rilgan.

Kichik burchaklar uchun taqribiy hisoblashning nisbiy xatosi



4-rasm. Kichik burchaklar uchun taqribiy hisoblashning nisbiy xatoligi va maksimal og'ish burchagining bir biriga bog'liqligi.

Keyingi bosqichda θ_0 ning katta qiymatlarida taqribiy hisoblashning qanchalik xato ekanligini aniqlashimiz mumkin. Nisbiy xatolik foiz ifodasi uchun tenglama:

$$R = 100\% * \frac{T_{aniq} - T_{taqrib}}{T_{aniq}} \quad (34)$$

(34) orqali biz 4-rasmda keltirilgan grafikni hosil qilamiz.

XULOSA

Matematik mayatnik davrini hisoblashda kichik burchaklarni taqribiy hisoblash yetarlicha yaxshi natija beradi. Agar $\theta < \frac{\pi}{4}$ bo'lsa, $R < 3,84\%$. Biroq,

hatto bu kichik noaniqlik ham yig'ilib borishi mumkin: masalan, $\omega = \pi$ va $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ bo'lgan mayatnik 13 marta to'liq tebranishidan so'ng, T_{taqrib} haqiqiy mayatnikdan yarim davrga ortda qoladi. Bu shuni anglatadiki, 13 tebranishdan so'ng, yaqinlashuvda mayatnik muvozanat holatida bo'lsa, aniq mayatnik maksimal muvozanat vaziyatidan chetlashish holatida bo'ladi va aksincha. Shu sababli, matematik mayatnik harakatini uzoq muddatli modellashtirishda bu xatolar muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Ammo qisqa vaqt oralig'ida xatolik deyarli sezilmaydi, ayniqsa kichik burchaklarda, masalan, $\frac{\pi}{8}$ holatida yaqinlashuv xatosi 1 foizdan kam bo'ladi. Bunday kichik burchakli mayatniklar amalda kam

uchramaydi: ko'plab soatlarda uzun, ingichka mayatniklar mavjud bo'lib, ular yuqori l va past θ_0 qiymatlariga ega. Bu ikki doimiy qiymat mayatnikning uzoq va aniq davrini ta'minlashga yordam beradi. Oxir-oqibat, kichik burchaklarni taqribiy hisoblash aniq tenglamaga nisbatan foydalanish qulayligini sezilarli darajada oshiradi. (33)-tenglamada mavjud bo'lgan aniq integral uchun algebraik ifodani olishning iloji yo'q, chunki bu integral elliptik integral deb ataladi. U dastlab ellips egri chizig'ining uzunligini va mayatnikning davrini topish uchun o'rganilgan, keyinchalik kengaytirilgan va hozirda matematikaning ko'plab sohalarida qo'llanilmoqda. T_{aniq} elliptik

integralni o'z ichiga oladi va uni faqat sonli hisoblash orqali baholash mumkin, T_{taqrib} esa bunday integrallarni o'z ichiga olmaydi va juda sodda. Shuning uchun imkon qadar taqribiy hisoblashdan foydalanish mantiqan to'g'ri bo'ladi. Agar mayatnikning maksimal og'ish burchagi nisbatan katta bo'lsa ham, agar mayda kamchiliklarga e'tibor berilmasa, taqribiy hisoblashdan foydalanish ma'qul. Ammo, aniq kompyuter modeli uchun aniq tenglamadan foydalanish kerak. Aks holda, oldin muhokama qilingan faza xatolari vaqt o'tishi bilan mayatnik harakatiga sezilarli ta'sir ko'rsatadi

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Anthony Zee, Fly by Night Physics: How Physicists Use the Backs of Envelopes, (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2020). 9
2. Zhiwei Chong, "A qualitative analysis to simple harmonic motion," arXiv preprint arXiv:2209.12662 (2022). (Accepted by The Physics Teacher)
3. The subscript in Tp stands for physical, while that in yp actually stands for the center of percussion.
4. Hugh G. Gauch, Scientific Method in Practice, (Cambridge University Press, Cambridge, 2003) p. 269.
5. P. N. Raychowdhury, and J. N. Boyd, "Center of percussion," Am. J. Phys. 47(12):1088- 1089 (1979).
6. J. Hass, C. Heil, and M. D. Weir, Thomas' Calculus, 14th ed. (Pearson Education, Boston, 2018), p. 191.
- 7.. Helden, A. V. Pendulum Clock 1995. <<http://galileo.rice.edu/sci/instruments/pendulum.html>>.
8. Nave, R. Simple Harmonic Motion HyperPhysics. <<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/shm.html>>.

9. Daniel, R. Acoustics and Vibration Animations <<http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/Pendulum/Pendula.html>>.

10. Austin Christian. Math 31A Discussion Session 2016.
<<http://www.math.ucla.edu/~archristian/teaching/31a-w16/week-2.pdf>>.