Жумаев Э.Э.
профессор
Термезский филиал Ташкентского аграрного университета

НЕКОТОРЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПРОСТРАНСТВ ДУГУНДЖИ

Понятие компакта Дугунджи, введенное А.Пелчинским [1], оказалось весьма плодотворным и привело к созданию важных новых методов в общей топологии. Отвечая на вопрос Пелчинского, Р. Хэйдон показал [2], что всякий компакт Дугунджи диадичен [3] те. непрерывный образ обобщенного канторова дисконтиниума D^T. С другой стороны компакты Дугунджи - это в точности компакты класса *AE(G)* . Теория *AE(фТ)* компактов была распространена А.Н. Дранишниковым [4] на абсолютные экстензоры в размерности *n.* Так же в этой работе определены некомпактные аналогии пространства Дугунджи и пространства Милютина. Изучены их топологические свойства и геометрические свойство с применением некоторых ковариантных функторов. Терминология и обозначение, не разъясняемые ниже, такие же, как в книгах [1,3,5].

Для тихоновского пространства X через С(Х) обозначим пространство непрерывных функций определенных на X с компактно-открытой топологией.

Линейный оператор w : С(Х) *C(Y)* назовем регулярным, если выполнены следующие условия:

a) отображение *и* : С(Х) —> С(К) - непрерывно;

b) если *(р* > 0, то *и(ср)* > 0 (те. оператор положителен);

c) г/($1_г$) = $1_г$, где l_v : *X* {1} cz *R* - постоянная функция, те. оператор переводит постоянные функций в постоянные. Каждое непрерывное отображение *f : X —> Y* порождает регулярный оператор /*: С(К) *C(Y)* по формуле *f*\(p) = (р° f,* где *(р* е С(А).

Если X замкнуто в Y и для всякого *ср* е С(Х) сужение функции *и(ср)* на X совпадает с *<р* , то оператор и называется оператором продолжения.

Если отображение *f .X ^Y* сюръективно, то регулярный оператор *и* : С(Х) С(У) называется регулярным оператором усреднения.

Пространство называют *R* — компактным, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой степени действительной прямой .

Если *Y* подпространство пространства *X* , то символом С(Х) $|_г$ обозначают множество всех продолжаемых на все *X* элементов из *C(Y*). Говорят, что подпространство *Y* С-вложено в пространстве *X*, если С(Х) $|_г$ = С(У).

Определение [6]. *R* — компактное пространство X (или, *R* -компакт). Назовем пространством Дугунджи, если любое С — вложение *f : X Y* на тихоновское пространство *Y* , имеет регулярный оператор продолжения *и* : С(Х) С(У).

Определение [1]. Совершенный эпиморфизм *f : X -^Y* называется милютинским, если он допускает регулярный оператор усреднения *и : C(X)* С(У).

Тихоновское пространство *X* называется пространством Милютина [7], если существует милютинский эпиморфизм *f : N^T —> X*, где *N* — множество натуральных чисел.

Назовем вложение R^A в $Г^4$, где *А* - произвольное индексное множество, стандартным, если для любого *B* cz *A* выполнены следующие соотношения: $t_B(R^A) = R^B$ и $t_B(R^A) = n_в$, где через $t_B : Г^4$ -*X* I^4 и $л_в$: R^4 —> R^B - соответствующие проектирования.

Пространство *X* назовем абсолютным (окрестностным) экстензором в размерности и = 0,1,...,да, если для любого пространство Z размерности <*n* и любого его подпространства Z_o, каждое отображение $f.Z_0$^*X* такое, что С(/)(С(Х)) а C(Z) $|_z$ может быт продолжено до некоторой стабильной функционально открытой окрестности Z_n в Z) всего Z. *A(N)E(yo)*-пространства будем называть абсолютными (окрестностными) экстензором или коротко *A(N)E* - пространством.

Теорема 1. Если *X* есть *AE(p)* пространство, то *X* является и пространством Дугунджи и пространством Милютина._

Доказательство. В дальнейшем предположим, что *R'* стандартно вложено в $Г^4$, где *R* = (0,1) и *I* = [0,1]. Пусть *u* : C(X) C(У) регулярный оператор. В этом случае регулярный оператор и порождает отображение *u°X^>PДXA* по формуле г/° (y)(</) = г/(</)(y) для каждого уеУ и <//eC(X), где *PДX) = {a e P(/3X}*: supp« cz *X}*. Для *XcY* пусть $C(F)|_V$ = {/e C(X) :/ = $g/_x$ для некоторого *geC(Y)}*. Говорят, множество *X <^Y C*- вложено в У, если C(Y) = $C(7)|_V$ те. любое отображение *f -.X^R* продолжается до У. Тихоновское пространство *X* назовем *AE*(o)-пространством, если для каждого нульмерного пространства Z и его подпространства Z_o cz Z каждое отображение *f*: $Z_{(1}$ *X* удовлетворяющее /° (C(X)) с C(X)| имеет непрерывное продолжение на все Z

Заметим, что для каждого уе /(X)сГ имеет место *u°(y)* е *PД/ XУУ)* cz *PДX),* где У

Пусть теперь *X* е *AE(0)*. Будем считать, что пространство *X* C —вложено в R^T (для подходящего г). В силу предложения 3.3.25 [5] существует функционально замкнутое совершенное и 0 - обратимое отображение *g* : ДУ R^r обладающее регулярным оператором усреднения *u : $C(N^T)$ —> $C(R^r)$*. Тогда имеется такое отображение *u° : R^r —> PДXД,* что PjCg) ° *u°* = *$S(R^T)$*. В силу нульмерности N^T и из того, что *X* е *AE(Д)* существует такое отображение = g| Заметим, что [X] = *X* так как каждое *AE(p)* пространство

R — компактно. Следовательно, *X* замкнуто в R^T В этом случае имеет место равенство

=ᶠM,₍!-,,, и w 4=«

Поскольку носитель $u°_x$ есть g^{-1}(x) для каждого *x* е *X.* Для совершенной сюръекции *yЛX ^-X* сопряженное отображение к *y/° :X -o-$P_p(N^T)$* будет регулярным оператором усреднения те. Пространство *X* есть пространство Милютина. Если мы определим отображение сг: R^1 P_p *(X)* полагая *сг* = P_p *('//)* ° *u°*, Тогда оф. = 8_X. В этом случае отображение <T° сопряженное к отображению сг будет регулярным оператором продолжения т.е. *a°*: C(X) *$C(R^T)$*. Значит, *X* есть пространство Дугунджи. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если *X* пространство Дугунджи. Тогда *X* есть *AE(p)* пространство.

Доказательство. Через *m* обозначим *R* вес пространства *X*. Если *R - co(X) = co*, тогда ***X*** замкнуто в $\boldsymbol{R^{'J}}$. Следовательно, ***X*** польское пространство. В силу предложения 1.1.4[5] пространство *X* есть *AE(p)* пространство.

Пусть *X -R* - компактно и C - вложено в R^A и *u : C(X) $C(R^A)$* регулярный оператор продолжения. В этом случае пространство X является обратным пределом факторизующего строго *co* спектра S_Y *={X_B,P? ,ex.p_aA}*. Через *A(a)* обозначим подмножества индексного множества *A* ординал которого *a* < *m* . Отображение *P_a : X -o- X_a* определим пологая $/_{4(17)}|$ = P_a и p^p_a *-,X_p^X_a* есть ограничение отображения Дфф' = $Д^8$.

Пусть теперь построены системы *A(a)* обладающие следующими условиями (свойствами):

i) *A(o)* -точка;

ii) Если *y* предельный ординал < *m*, то Л(y) = *A(a);*
a<y

iii) Для каждого *a* разность *A(a* +1) \ *A(a)* - счетно;

iv) Для каждого *a* и для всех *f eC(X*) отображение *u(f* ° $P_г$*)* согласовано с отображением (/ °$я_{4(a)}$*)*

на подпространстве $X_a x R^{AXAW}$ пространство R^A \

v) Для всех *а* и любого / *еС(X_{a+l})* ограниченной *(f* о/фи)! является фактором сквозного отображения $тг_{4(a+1)}$.

Из условии iii) вытекает, что отображение (соседние проекции) $P``_{+1}$ имеет польское ядро т.е. имеет место следующая диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
X_{\alpha+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "P_{\alpha}^{\alpha+1}"'] & X_{\alpha} \times R^{Л(a+1)\setminus Л(a)} \\
{} &
\end{tikzcd}
$$

В силу условий (V) определяем регулярный оператор продолжения $«_{a+}P$-$C(X_{a+l})$^$C(X_a x R^{A(a}XX$^ полагая $u_{a+1}(J)$ о $тг_{A(a+1)}$ = $u(J$ о $P_{a+1})$, где *f еС(X_{a+1}).* Из свойства (IV) вытекает, что имеет место равенство $u_{a+4}\{f^Q Pyp') = /лу._{:}$ где *f & С(ХД.* Очевидно, что отображение $л_a : X_a$ х X_a - открыто.

* Доказывается, что отображение /ф *.X* $X_{:}$. тоже открыто. Значит, отображение *Ру' :* X_{a+1} X_a - открыто. Систему множеств *А(а)* построим по трансфинитной индукции.

Пусть 4(0) = 0 , то X_o - есть точка.

Семейство (/2)-$_{<г}$ в *С(Х)* отделяет точки пространства X от множества.

Допустим множества *А(а)* определены для всех ординалов */3 < Т* и удовлетворяют условиям (ii), (iii), (iv) и (v). Пусть *С,* первый ординал для которого *f,,* не является факторизацией сквозного отображения P_p. В силу теоремы 6.27 (или следствия 6.28[3]) для функции *f,,* определенный на *R* существует счетное подмножество *С* cz *А,* что /2 = *g* о P_c т.е. /7 - зависит от счетного числа координат или же *f* является фактором сквозного отображения P_c .

В дальнейшем рассуждая так же в доказательстве теоремы 3[2] выбираем индексное множество *В*.

Теперь определяем *A(J3* +1) = Л(Д) о 7> . Имеем следующее диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr, "P_{\beta}"'] & X_{\beta} \times R^{A\setminus A(\beta)} \arrow[d, "t_{A(\beta)}"] \\
& X_{\beta}
\end{tikzcd} \qquad (2)
$$

Регулярный оператор продолжения :С(Х) определяем полагая

. Так как при *а= /3* положим ° P_a) = *f* ° *л:* *f&C^X^.*

Заметим, что

а) для каждого *а*, пространства X_{a+i}. С-вложенов X_a х R^A и имеет регулярный оператор u_{a+1} продолжения (диаграмма 1). Отметим, что X_{a+1} польское пространство. Следовательно, X_{a+1} есть пространство Дугунджи и X_{a+1} е ЯЕ(0);

б) Спектр 5_A. =*{X_a,P_{ap}, а}* вполне упорядочен и *со* - полно, соседние проекции $P^{``+1}$ открыты и имеют польское ядро;

в) X_o - является польским ЯЕ'(О) пространством;

г) В силу открытости соседних проекцией ДД^1 по следствию 3.3.27 [5] /Д' -0-мягко.

д) В силу *R*— компактности пространства *X* по теореме 3.2.17 [5] спектр $5_Д$. факторизующий строгий *со* — спектр.

е) lim.S'$_v$ -гомеоморфен пространству *X* .

Теперь в силу предложения 3.5.4. [5] пространство *X* является ЛЕ(0) пространством. Теорема 2 доказана.

В силу теоремы 1 -2 имеем

Теорема 3. Класс ЛЕ(0) пространств совпадает классом пространств Дугунджи.

Полные метризуемые пространство со счетной базой называется польскими пространствами.

Следствие. Каждое польское пространство есть пространство Дугунджи.

Из С-вложенности и R — компактности пространств Дугунджи, пространства Дугунджи замкнуты в R^{r}.

Топология появилась относительно недавно, но уже успела произвести переворот в математике и вызвать расцвет новых дисциплин, а также обогатить естественные науки новыми идеями.

***Топология** — это раздел математики, изучающий свойства фигур, которые остаются неизменными при определенных трансформациях, происходящих без разрывов и склеиваний.*

Если одну из двух фигур можно получить из другой с помощью подобных преобразований, то эти фигуры называют **топологически эквивалентными.**

Подразделы топологии — теория графов, теория узлов и теория поверхностей. Язык топологии непрост для понимания. Однакотакие понятия, как топологическая трансформация, кривые Жордана или теорема о неподвижной точке, интуитивно понятны даже для тех, кто не обладает глубокими знаниями математики. Более того, не раз выдвигались предложения включить эти темы в школьный курс математики.

Допустим, что дана эластичная поверхность, сделанная, например, из резины или пластилина. Мы легко можем деформировать ее и нарисовать на ее поверхности, например, квадрат. **Растягивая поверхность,** мы можем превратить этот квадрат в круг, шестиугольник или любой другой многоугольник.

Важно, что при этих трансформациях поверхность не разрывается и никакая точка не накладывается на другую. Такие трансформации, которые выполняются без разрезов, склеивания и проделывания отверстий, то есть путем растяжения, сжатия и разглаживания, называются **непрерывными.** Это одно из важнейших понятий математики. Чтобы корректно определить его, ученым потребовалось много времени.

Рассмотрим три точки А, В и С, расположенные на одной из сторон квадрата, нарисованного на пластилине. Заметим, что после первой трансформации все три точки стали располагаться на окружности, сохранив начальный порядок. Это же происходит, когда квадрат преобразуется в восьмиугольник. Если бы мы сложили поверхность пополам, то исходный порядок нарушился бы, и мы смогли бы поместить точку С между А и В. Это была бы операция склеивания. Чтобы вернуться к исходному положению, нам пришлось бы разорвать пластилин или отклеить от него кусочек. Если мы начнем плавно растягивать кусок пластилина двумя руками, то начнется непрерывная деформация. Эта деформация резко перестанет быть непрерывной, когда кусок пластилина разорвется пополам. **Непрерывные трансформации —** это плавные трансформации, которые не приводят к необратимым, катастрофическим изменениям.

Если для некой непрерывной трансформации обратная ей также является непрерывной, то эта трансформация называется **топологической.** Иными словами, те же правила, что использовались при трансформации некой фигуры, будут применяться, чтобы вернуть ее в прежнее состояние. Допустим, что у нас есть кусок деформируемого материала (предположим, что это пластилин — классический пример в топологии). Вылепим шарик, положим его на стол и раскатаем в плоский диск. Очевидно, что из этого диска мы можем снова получить шарик, используя те же правила: без разрывов, склеиваний и т.д. Это означает, что обе фигуры являются топологически эквивалентными, так как существует непрерывная трансформация, преобразующая шарик в диск, такая что обратная ей трансформация также является непрерывной. Аналогично мы можем вылепить куб, пирамиду или цилиндр, и все эти фигуры будут топологически эквивалентны.

Поэтому топологию называют **резиновой геометрией.** Топология — это в некотором роде геометрия, но не такая, к которой мы привыкли. Расстояния, углы и даже форма фигур играют в топологии второстепенную роль. А вот наличие отверстий имеет определяющее значение. Например, тор — трехмерная фигура в форме бублика — не является топологически эквивалентным сфере.

Нельзя преобразовать одну из этих фигур в другую, не нарушив правила игры. Но мы можем преобразовать бублик в чашку. Это упражнение помогает лучше понять смысл топологической трансформации.

В шутку говорят, что тополог — это человек, который не отличает бублик от чашки с ручкой. В действительности же тополог обращает внимание на **количество отверстий** в обеих фигурах, так как это действительно важно с точки зрения топологии.

Определить, где находится точка P — **внутри или снаружи** некой фигуры — иногда очень просто, как например для фигуры, изображенной на рисунке:

p

•

Однако для более **сложных фигур,** как, например, для той, что представлена ниже, сделать это сложнее. Для этого придется нарисовать линию карандашом.

Однако при поиске ответов на подобные вопросы мы можем использовать один простой, но мощный инструмент. Окружность является **плоской замкнутой кривой,** то есть имеет внутреннюю и внешнюю части. Например, кривая на рисунке *а)* не является замкнутой. Кроме того, окружность является простой кривой, то есть не имеет самопересечений, подобно кривым на рисунке *б).*

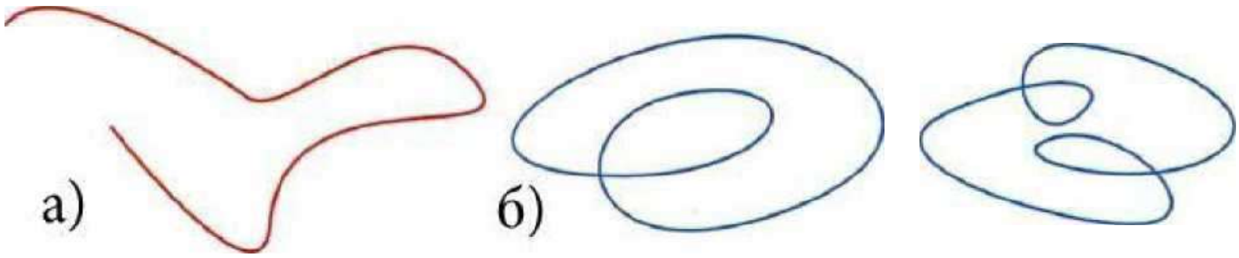
Кривые, которые уд овлетворяютэтим двум условиям (являются простыми и замкнутыми), называют **кривыми Жордана.** Все кривые Жордана топологически эквивалентны, так как их можно получить непрерывной деформацией окружности. Является точка внешней или внутренней по отношению к кривой это топологическое свойство. Следовательно, если мы изучим это свойство для окружности, то оно будет полностью аналогичным для всех кривых Жордана вне зависимости от их сложности.

Допустим, даны две точки P и Q. Одна из них находится внутри окружности, другая снаружи. Мы можем соединить эти точки линиями разной формы, как показано на рисунке. Красная линия пересекает окружность один раз, зеленая три раза, оранжевая пять. Любая такая линия пересечет окружность нечетное число раз. Напротив, если обе точки находятся внутри окружности, легко показать, что в этом случае **число пересечений** всегда будет четным.

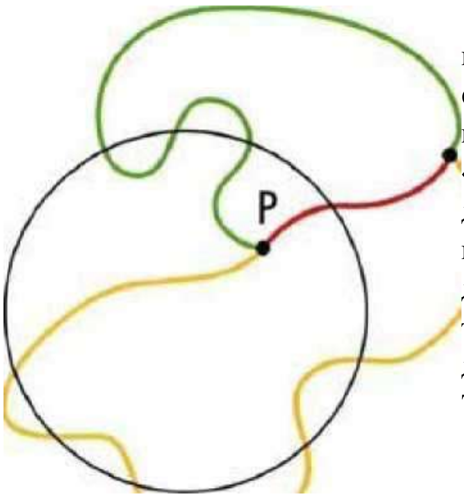
Таким образом, поставленная задача решена. Допустим, дана точка P снаружи кривой (простой и замкнутой). Мы хотим узнать, где находится другая точка **внутри кривой или снаружи.** Для этого нужно соединить точку P и искомую точку, затем подсчитать число пересечений. Если оно окажется четным, данная точка лежит снаружи кривой, если число пересечений будет нечетным внутри кривой(рис. слева).

В приведенном примере видно, что если соединить данную точку и точку снаружи кривой, то число пересечений окажется нечетным. Это доказывает, что данная точка лежит внутри кривой.

Овладев этим приемом, можно удивить друзей простым фокусом. Попросите кого- нибудь нарисовать **простую замкнутую кривую** и расположить точку в любом месте этой кривой, после чего прикрыть часть рисунка (рис. справа).



Нетрудно заметить, что воображаемая линия, которая соединяет указанную точку и точку вне кривой, пересекает кривую пять раз. Следовательно, мы гарантированно можем утверждать, что указанная **точка лежит внутри кривой.**



Все описанное выше — прямое следствие так называемой **теоремы Жордана,** которую сформулировал французский математик Камиль **Q** Жордан (1838-1922). Он привел доказательство этой теоремы в своем знаменитом «Курсе анализа», опубликованном в 1882 году. Однако его доказательство содержало ошибки, которые сам Жордан, несмотря на все усилия, не смог исправить. Первое полное доказательство теоремы авторства О. Веблена появилось только в 1905 году, а в 1922 году Джеймс Александр доказал ее для пространств с произвольным числом измерений.

Теорема Жордана гласит: *плоская простая замкнутая кривая разбивает плоскость иа две связные компоненты и является их общей границей.*

Иными словами, замкнутая кривая, подобная следующей, **разбивает плоскость** на две части. Одна из них конечна (выделена красным), другая — бесконечна (выделена зеленым), и границей между ними является эта кривая.

Теорема Жордана обладает двумя свойствами, которые почти никогда не встречаются одновременно и тем самым делают ее уникальной: эта теорема очевидна и одновременно сложна. Она очевидна, так как любой из нас может не просто понять ее формулировку, но также интуитивно почувствовать, что теорема верна. Она сложна, поскольку ее точное доказательство занимает множество страниц, на которых теряется интуитивно понятный геометрический смысл теоремы. Также существуют короткие доказательства (одно из них занимает две строчки), но они требуют **знаний топологии** «высших сфер».

Термин «топология» впервые появился в 1834 году. Его ввел **Иоганн Бенедикт Листинг** в труде «Предварительные исследования по топологии». Изначально Листинг хотел назвать топологию позиционной геометрией, но Карл фон Штаудт (1798-1867) уже использовал этот термин для проективной геометрии.

Большинство разделов математики появились в глубокой древности. Топология — явное исключение из этого правила. Многие считают появление топологии в XIX веке усилиями **Анри Пуанкаре** (1854-1912) началом всей современной математики. В топологии была предложена новая концепция пространства. Говорят, что топология — это геометрия, в которой не используются измерения. В этом смысле начала топологии упоминаются у **Готфрида Лейбница (**1646-1716) в егознаменитой работе «Геометрическая характеристика», где описывается способ анализа, в котором для определения положения не применяются измерения. В 1736 году Леонард Эйлер (1707-1783) решил задачу о кенигсбергских мостах с помощью теории графов. Но если говорить о топологии в современном смысле, то ее основателями, бесспорно, являются четыре ученых: Анри Пуанкаре_с его analisis situs, **Георг Кантор** (1845-1918), который создал теорию множеств и определил понятия предельной точки, замкнутого, открытого и производного множества, **Ян Брауэр** (1881-1966), который показал инвариантность пространственных измерений, а также **Феликс Хаусдорф** (1868-1942), который сформулировал аксиомы для топологического пространства.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Пелчинский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их приложения М.Мир. 1970, 160с.
2. Haydon B. On problem of Pelezynski spaces, Dugundji spaces and AR (dimO), Studia Math. 1974, V.52,N1, P.23-31.
3. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции М.Из-во МГУ, 1988, 288с.
4. Дранишников А.Н. Абсолютные F — значные ретракты и пространстве функций в топологий поточечной сходимости. Сиб.Мат.журнал, T.XXVII, №3, с.74-86.
5. Федорчук В.В., Чигогидзе А.Ч. Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия М.Наука, 1992, 232с.
6. Жураев Т.Ф. Пространства Дугунджи и абсолютные экстензоры в категории *Tych,* 2019, №5. Блютень Института Математики, с.22-27.
7. Аюпов Ш. А., Жураев Т.Ф. Пространства Дугунджи и проективно замкнутые функторы в категории *Tych* Abst. Modern Problems of Geometry and Topology and its Applications, 2019, 21-23 November, Tashkent, pp. 10-11.
8. Shermukhamedova, N. A. "Philosophy." Tashkent: Noshir (2012).
9. Нишанова, О. (2023). Социальные характеристики этнокультуры, in Library, 7(1), 163-165.извлечено от https://inlibrary.uz/index.php/archive/article/view/21843