Численное решение задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка

Исмаилова Лемара Рафатовна

Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль - Хорезми, г. Ташкент 100084, пр. Амира Темура, 108, Lemara28@mail.ru

https://doi.org/10.5281/zenodo.10471163

Ключевые слова: задача Коши, численное решение, дифференциальное уравнение.

Аннотация: В данной работе рассматривается численное решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Приведена программная реализация метода Эйлера и Рунге – Кутта.

Численные методы – раздел прикладной математики, в котором проводятся разработка, обоснование и реализация (на базе вычислительной техники) методов приближенного решения разнообразных задач на уровне математических моделей.

Пусть дано дифференциальное уравнение:

$F = (x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ (1).

Решением дифференциального уравнения (1) называется функция $y = \varphi(x)$, которая после её подстановки в уравнение превращает его в тождество.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка содержит n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, т. е. общее уравнение имеет вид $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Частное решение дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения.

Для выделения частного решения из общего нужно задавать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных в общем решении, т.е. каков порядок уравнения.

В зависимости от способа задания дополнительных условий для получения частного решения дифференциального уравнения существует два типа задач: задача Коши и краевая задача. Если условия задаются в одной точке, то это задача Коши, если более чем в одной точке, то это краевая задача.

В математическом анализе разработано немало приемов нахождения решений дифференциальных уравнений через элементарные функции. Между тем весьма часто при решении практических задач эти методы либо неприменимы, либо их применение очень трудоемко. По этой причине для решения дифференциальных уравнений созданы приближенные методы.

Самым распространенным приближенным способом решения дифференциальных уравнений является метод конечных разностей. Его сущность состоит в следующем: область непрерывного изменения аргумента заменяется дискретным множеством точек, называемых узлами. Эти узлы составляют разностную сетку. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется сеточной. Исходное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. Такая замена называется аппроксимацией дифференциального уравнения на сетке.

Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки.

Решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, заключается в отыскании функции $y(x)$, удовлетворяющей этому уравнению и начальным условиям $y(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 - заданные числа.

Самые распространенные разностные методы решения поставленной задачи: метод Эйлера и метод Рунге – Кутта.

МЕТОД ЭЙЛЕРА

Получение таблицы значений искомой функции $y(x)$ заключается в циклическом применении формулы: $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, $i = 0,1,2,\dots$.

МЕТОД РУНГЕ-КУТТА

Этот метод наиболее распространенный и основан на вычислении значения функции в четырех точках, что позволяет добиться большой точности.

На каждом шаге вычисления выполняются

по формуле:

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$,

где i = 0,1,2,…

$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$,

$k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$,

$k_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$,

$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$

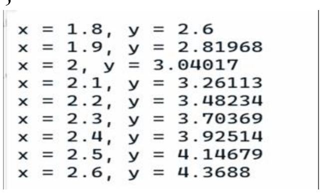
Этот метод требует большого объема вычислений, но обладает повышенной точностью.

Задание:

Уравнение	x_0	y_0	*a*	*b*	*h*
$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$	1.8	2.6	1.8	2.6	0.1

Программа для реализации метода Эйлера

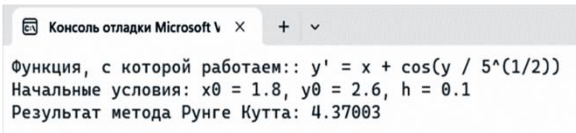
```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
double main_func(double x, double y) {
   return x + cos(y / sqrt(5));
}
void eulerMethod(double x0, double y0, double h,
double x_end) {
   double x = x0;
   double y = y0;
   while (x < x_end + h) {
      cout << "x = " << x << ", y = " << y << endl;
      y = y + h * main_func(x, y);
      x = x + h;
   }
}
int main() {
   double x0 = 1.8;
   double y0 = 2.6;
   double h = 0.1;
   double x_end = 2.6;
   eulerMethod(x0, y0, h, x_end);
   return 0;
}
```



```
x = 1.8, y = 2.6
x = 1.9, y = 2.81968
x = 2, y = 3.04017
x = 2.1, y = 3.26113
x = 2.2, y = 3.48234
x = 2.3, y = 3.70369
x = 2.4, y = 3.92514
x = 2.5, y = 4.14679
x = 2.6, y = 4.3688
```

Программа для реализации метода Рунге-Кутта

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
double main_func(double x, double y) {
   return x + cos(y / sqrt(5));
}
double rungeKutta(double x0, double y0, double h,
double x_end) {
   double x = x0;
   double y = y0;
   while (x <= x_end) {
      double k1 = h * main_func(x, y);
      double k2 = h * main_func(x + 0.5 * h, y + 0.5 *
k1);
      double k3 = h * main_func(x + 0.5 * h, y + 0.5 *
k2);
      double k4 = h * main_func(x + h, y + k3);
      y = y + (1.0 / 6.0) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
      x = x + h;
   }
   return y;
}
int main() {
   setlocale(0, "");
   double x0 = 1.8;
   double y0 = 2.6;
   double h = 0.1;
   double x_end = 2.6;
   double result = rungeKutta(x0, y0, h, x_end);
   cout << "Функция, с которой работаем:: y' = x +
cos(y / 5^(1/2))" << endl;
   cout << "Начальные условия: ";
   cout << "x0 = " << x0 << ", y0 = " << y0 << ", h =
" << h << endl;
   cout << "Результат метода Рунге Кутта: " <<
result << endl;
   return 0;
}
```




```
Функция, с которой работаем:: y' = x + cos(y / 5^(1/2))
Начальные условия: x0 = 1.8, y0 = 2.6, h = 0.1
Результат метода Рунге Кутта: 4.37003
```

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бахвалов, Н.С. Численные методы : учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Наука, 1987, 598 с.

[2] Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: Высшая школа, 2000, 190 с.

[3] Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2005, 304 с.

[4] Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2005,416 с.

[5] Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978, 512 с.

[6] Копченова Н. И., Марон И. А. вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Лань, 2009, 370 с.

[7] Колдаев В.Д. Численные методы и программирование. – М.: Форум, 2009, 336 с.