

ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО СВЯЗАННОГО УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР ПОЛЯ- ДЮФФИНГА

Елгондиев К.К.

Наурызбаева Ш.О.

Каракалпакский государственный университет

elgondiev61@gmail.com

naurizbaevashasanem@gmail.com

Ключевые слова. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, метод усреднения, квазилинейные уравнения, порождающая система, периодические решения, приближенные решения.

Аннотация: В данной работе рассматривается порождающая система являющейся линейным дифференциальным уравнением второго порядка с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Задача существования двухпараметрического семейства периодических решений в таких порождающих системах при фиксированных величинах импульсного воздействия решена в ранних работах автора [4,5] и результаты этих работ применены автором для построения аналитического вида приближенных решений квазилинейных уравнений второго порядка с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени при помощи асимптотических методов нелинейной механики. В качестве примеров построены приближенные решения квазилинейного уравнения Ван-дер Поля с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени, а также уравнение Дюффинга с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. В данной статье рассмотрена задача о применении метода усреднения для исследования квазилинейных уравнений второго порядка с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. С помощью метода усреднения в смысле Ван-дер Поля построена аналитическая форма приближенного решения квазилинейного связанного уравнения Ван-дер Поля-Дюффинга с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени.

CONSTRUCTION OF ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE QUASILINEAR COUPLED VAN DER POL-DUFFING EQUATION

Summary: In this paper, we consider a generating system that is linear differential equation of the second order with impulse action at fixed times. The problem of the existence of a two-parameter family of periodic solutions in such

generating systems for fixed values of impulse action was solved in the author's early works and the results of these works were used by the author to construct an analytical form for approximate solutions of second-order quasilinear equations with impulse action at fixed times using asymptotic methods of nonlinear mechanics. As examples, approximate solutions of the quasilinear Van der Pol equation with impulse action at fixed times, as well as the Duffing equation with impulse action at fixed times, are constructed. This article considers the problem of using the averaging method to study second-order quasi-linear equations with impulse action at fixed times.

Key words. Differential equations with impulse action, averaging method, quasilinear equations, generating system, periodic solutions, approximate solutions.

Рассмотрена задача построения при помощи метода Крылова-Боголюбова асимптотического решения квазилинейного связанного уравнения Ван-дер Поля-Дюффинга с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени.

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad t \neq t_k, \quad (1)$$

с условием импульсного воздействия

$$\Delta \frac{dx}{dt} \Big|_{t=\tau_k} = I_k, \quad k \in Z, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $I_k \in R^1, k \in Z$.

Относительно моментов импульсного воздействия $\tau_k, k \in Z$, предположим, что $\tau_m > \tau_n$ при $m > n$ и $\tau_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим задачу построения аналитической форме асимптотического решения системы вида (1), (2) с помощью метода Крылова-Боголюбова [1,2] и задачу решения квазилинейного связанного уравнения Ван-дер Поля-Дюффинга с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени [3].

Пусть выполнены условия:

1) $\tau_{m+p} = \tau_p + T, I_{m+p} = I_p$ для некоторого действительного числа $T > 0$, некоторого натурального m и всех целых p .

2) имеют место равенства

$$\sum_{p=1}^m I_p \cos \omega t_p = \sum_{p=1}^m I_p \cos \omega t_p = 0.$$

Тогда согласно результатам работы [4] невозмущенная задача, соответствующая системе (1), (2), при $\varepsilon = 0$ имеет решение, удовлетворяющее

однородным начальным условиям $x(t_0) = \frac{dx(t_0)}{dt} = 0$, $\tau_0 \leq t_0 < \tau_1$ которое представимо в виде

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau_1 - t_0), \\ \frac{I_1}{\omega} \sin \omega(\tau - \tau_1 + t_0), & t \in [\tau_1 - t_0, \tau_2 - t_0), \\ \dots & \\ \frac{1}{\omega} \sum_{p=1}^k \sin \omega(\tau - \tau_p + t_0), & t \in [\tau_k - t_0, \tau_{k+1} - t_0), \\ \dots, & \\ 0, & t \in [\tau_m - t_0, T), \end{cases} \quad (3)$$

где $\tau \equiv (t - t_0) \pmod{T}$, $\tau \in [0, T)$.

Выполнив замену переменных $x = u(t) + z(t)$, где $u = u(t)$ – новая неизвестная функция, а функция $z(t)$ определяется формулой (3), от системы (1), (2) перейдем к уравнению

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = \varepsilon f\left(u + z(t), \frac{du}{dt} + \frac{dz(t)}{dt}\right) \quad (4)$$

правая часть которого в общем случае не регулярна.

При $\varepsilon = 0$ порождающее уравнение соответствующее уравнению (4) имеет двухпараметрическое семейство периодических с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ решений $u = a \cos \psi$, $\psi = \omega t + \varphi$, где в качестве параметров вступает произвольные постоянные a и φ . В этом случае $\frac{du}{dt} = -a \sin(\omega t + \varphi)$, поскольку $\frac{da}{dt} = 0$ и $\frac{d\psi}{dt} = \omega$.

При $\varepsilon \neq 0$ параметры a и φ начинают меняться в зависимости от t , т.е. имеем функций $a = a(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

В нерезонансном случае приведем уравнение (4) к стандартному виду при помощи замены

$$u = a(t) \cos(\omega t + \varphi(t)), \quad \frac{du}{dt} = -a(t) \sin(\omega t + \varphi(t)). \quad (5)$$

Тогда из (4) и (5), обозначив $\psi(t) = \omega t + \varphi(t)$, получим:

$$\frac{da(t)}{dt} \cos \psi(t) - a \sin \psi(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} = 0,$$

$$\frac{da(t)}{dt} \sin \psi(t) + a(t) \cos \psi(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f\left(a \cos \psi + z(t), -a\omega \sin \psi + \frac{dz(t)}{dt}\right).$$

Решая эту систему относительно $\frac{da}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$, имеем:

$$\frac{da(t)}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f\left(a \cos \psi + z(t), -a\omega \sin \psi + \frac{dz(t)}{dt}\right) \sin \psi, \quad (6)$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a\omega} f\left(a \cos \psi + z(t), -a\omega \sin \psi + \frac{dz(t)}{dt}\right) \cos \psi.$$

Из (6) видно, что новые переменные $a = a(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ являются медленно меняющимися функциями, так как первые части системы (6) пропорциональны малому параметру ε . Усредняя правую часть системы (6) по ψ и t , получаем усредненную систему

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon B(a), \quad (7)$$

где

$$A(a) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{2\pi} f\left(a \cos \psi + z(t), -a\omega \sin \psi + \frac{dz(t)}{dt}\right) \sin \psi d\psi dt,$$

$$B(a) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{2\pi} f\left(a \cos \psi + z(t), -a\omega \sin \psi + \frac{dz(t)}{dt}\right) \cos \psi d\psi dt.$$

Очевидно, что исследовать систему (7) намного проще, чем исходную импульсную систему (1), (2).

Применение изложенной методики к связанному квазилинейному уравнения Ван-дер Поля - Дюффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = \varepsilon x^3, \quad t \neq \tau_k \quad (8)$$

с импульсным воздействием

$$\Delta \frac{dx}{dt} \Big|_{t=\tau_k} = \frac{dx(t_k + 0)}{dt} - \frac{dx(t_k - 0)}{dt} = I_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \in Z \quad (9)$$

где моменты импульсного воздействия t_k и величины импульсного воздействия I_k , $k = 1, 2, \dots$ выбраны из условия 1) и 2) в виде

$$\tau_1 = \pi / 4, \tau_2 = 3\pi / 4, \tau_3 = 3\pi / 4, \tau_{p+3} = \tau_p + T, I_1 = I_2 = I, I_3 = I\sqrt{2},$$

$$I_{p+3} = I_p, p \in Z, I \in R, T > 3\pi/2, |I| < 2\sqrt{\pi/(2\pi-1)}$$

При таком выборе t_k и I_k , $k=1,2,\dots$ T – периодическое решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям $z(t_0) = \frac{dz(t_0)}{dt} = 0$, $0 \leq t_0 < \frac{\pi}{4}$, порождающего уравнения соответствующего уравнению (8) при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{\pi}{4}), \\ I \sin(t - \frac{\pi}{4}), & t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), \\ -I\sqrt{2} \cos t, & t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}), \\ 0, & t \in [\frac{3\pi}{2}, T), \end{cases} \quad (10)$$

Уравнения типа (8) при $\varepsilon = 1$ и $I_k = 0, \forall k \in N$ рассматривалась в работе [5].

В нерезонансном случае усредняя стандартную форму рассматриваемого уравнения, получим систему

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \varepsilon \left[-\frac{a^3}{8} + \frac{a}{2} \left(1 - \frac{I^2}{2T} \left(\pi + \frac{1}{2} \right) \right) \right], \\ \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon \left[-\frac{3a^3}{8} + \frac{I^2}{T} - \frac{3I^2}{2T} \left(\pi + \frac{1}{2} \right) \right] \end{cases}$$

Решая эту систему при начальных условиях $a(0) = a_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, получаем

$$a(t) = \frac{a_0 \sqrt{\frac{2T - I^2(2\pi + 1)}{2T}} \exp \left[\frac{2T - I^2(2\pi + 1)}{4T} \varepsilon t \right]}{\sqrt{\frac{2T - I^2(2\pi + 1)}{2T} - \frac{a_0^2}{4} \left(1 - \exp \left[\frac{2T - I^2(2\pi + 1)}{2T} \varepsilon t \right] \right)}},$$

График изменения амплитуды от времени приведен на рис. 1.

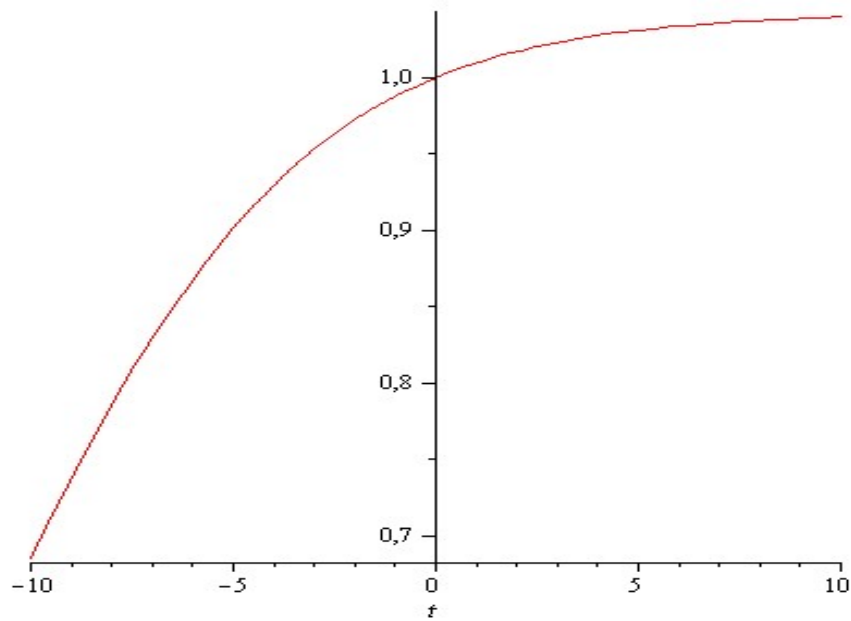


Рис.1

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \frac{3}{2} \ln \left| \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 \left(\exp \left[\frac{2T - I^2(2\pi + 1)}{2T} \varepsilon t \right] - 1 \right) + \frac{4T - 5I^2\pi - I^2}{4T} \right|$$

График зависимости фазы колебания от времени приведен на рис. 2.

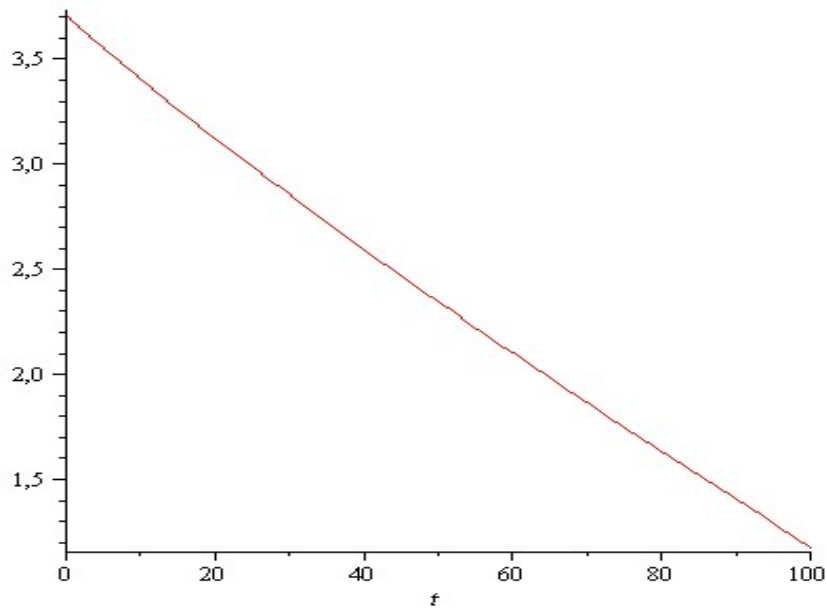
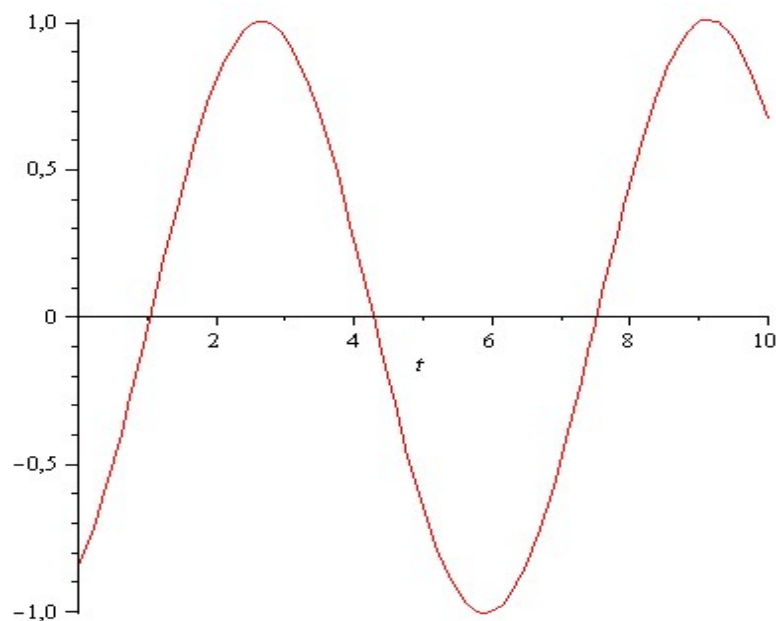


Рис. 2

Подставляя найденные соотношения получаем выражение для $u = u(t)$ в явном виде

$$u(t) = \frac{a_0 \sqrt{\frac{2T - I^2(2\pi + 1)}{2T}} \exp\left[\frac{2T - I^2(2\pi + 1)}{4T} \varepsilon t\right]}{\sqrt{\frac{2T - I^2(2\pi + 1)}{2T} - \frac{a_0^2}{4} \left(1 - \exp\left[\frac{2T - I^2(2\pi + 1)}{2T} \varepsilon t\right]\right)}} \times$$

$$\times \cos\left(t + \varphi_0 - \frac{3}{2} \ln\left|\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \left(\exp\left[\frac{2T - I^2(2\pi + 1)}{2T} \varepsilon t\right] - 1\right) + \frac{4T - 5I^2\pi - I^2}{4T}\right|\right)$$



Следовательно, решением связанного квазилинейного уравнения Ван-дер Поля –Дюффинга (8) с импульсным воздействием (9) есть функция

$$x = u(t) + z(t).$$

где функция $z(t)$ и $u(t)$ определены соотношением (10).

Литература:

1. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. –Киев: Наукова думка, 1974, -440 с.
2. Найфэ А. Введение в методы возмущений. –М.: Мир, 1984. -526 с.
3. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.
4. Самойленко В.Г., Елгондыев К.К. Исследование линейных дифференциальных уравнений в R^2 . Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.59. Киев, 1989. 32 с.
5. Елгондыев К.К., Самойленко В.Г. Применение методов малого параметра для исследования автономных дифференциальных уравнений второго порядка с импульсным воздействием: Сб. науч. тр. Ин-та математики АН УССР. “Асимптотические методы в уравнениях математической физики”. – Киев, 1989. – С.50–57.