ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ЖАББОРОВ НАСРИДИН МИРЗООДИЛОВИЧ

ИККИ ФАЗАЛИ МУҲИТЛАРНИ «А» АНАЛИТИК ФУНКЦИЯЛАР АСОСИДА МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ

01.01.01 – Математик анализ
05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2017 йил

УДК 517.54
УДК 519.957

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации
Content of the abstract of doctoral (DSc) dissertation

Жабборов Насридин Мирзоодилович
Икки фазали муҳитларни «А» аналитик функциялар асосида математик моделлаштириш 3

Жабборов Насридин Мирзоодилович
Математическое моделирование двухфазных сред на основе аналитических функции «А» 27

Jabborov Nasridin Mirzoodilovich
Mathematical modeling two-phase mediums based on «A» analytic functions 51

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works 55

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ЖАББОРОВ НАСРИДИН МИРЗООДИЛОВИЧ

ИККИ ФАЗАЛИ МУҲИТЛАРНИ «А» АНАЛИТИК ФУНКЦИЯЛАР АСОСИДА МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ

01.01.01 – Математик анализ
05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2017 йил

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.1.DSc./FM2 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Имомназаров Холматжон Худойназарович** физика-математика фанлари доктори, етакчи илмий ходим (Россия)
Расмий оппонентлар:	**Меграбов Александр Грайрович** физика-математика фанлари доктори, профессор (Россия, НДТУ)
	Ганиходжаев Расул Набиевич физика-математика фанлари доктори, профессор
	Хужаёров Бахтиёр Хужаёрович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Абай номидаги Қозоғистон Миллий педагогика университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети, Математика институти ҳузуридаги Dsc.27.06.2017.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2017 йил «___»___________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2017 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2017 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., академик

Ғ.И.Ботиров
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

М.М.Арипов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Кириш (Докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда флюдлари билан тўйинтирилган ғовак муҳитда тўлқин ҳодисаларни математик моделлаштиришни яратиш масалаларига келади. Ғовак муҳитда икки суюқликнинг фильтрация модели нефтни ҳавзадан сув (газ) ёки махсус аралашма ёрдамида сиқиб чиқариш усулидан фойдаланилади. Икки ўлчовли регуляр ҳолатда асосий чегаравий масалаларнинг ечимга эга бўлиши, ностационар ва стационар ечимларнинг силлиқлиги система мувофиқлаштириш коэффициентларини, ҳамда чегара ва чегаравий шартларнинг қатъийлигини аниқлаш муҳимдир. Сейсмоқидирув, гидроакустика ва видео кузатув маълумотларини ишончли талқин қилишга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда математика фанининг амалий татбиқига эга бўлган математик анализ ва математик моделлаштиришнинг долзарб йўналишлари, жумладан, флюидлар билан тўйинтирилган ғовак муҳит қатламини ўз ичига олган қатламли муҳитда акустик тўлқин тарқалиши ва қатламнинг синишини ҳамда акс қайтиш ҳодисаси хусусиятларини тадқиқ этишга алоҳида эътибор қаратилди. Ғовак муҳит скелетига нисбатан тўйинтирилган суюқликдаги тўлқин хусусиятининг ҳаракати, кўп фазали муҳитлар механикаси моделларини яратишда салмоқли натижаларга эришилди. “Математик анализ, Амалий математика ва математик модделлаштириш фанларнинг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари” этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда математик ва сонли моделлаштириш, комплекс ўзгарувчили функциялар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ҳозирги кунда жаҳонда икки фазали муҳитларда «А» комплекс ўзгарувчили аналитик функциялар асосида сиқилувчан икки фазали муҳитларнинг икки тезликли гидродинамик тадбиқий жараёнларини математик моделлаштириш суюқликлар механикасининг долзарб масалалардан бири ҳисобланади. Бу борада тўйинтирилган ғовак муҳитда товушни тадқиқ қилишда муҳим натижалардан бири бўлган тўлқиннинг уч хил кўринишга эгалигини башорат қилиш усулини ишлаб чиқиш; ярим фазода эластик ғовакнинг стационар тенгламалар системаси ечимини олиш ҳамда босим ва оғирлик кучини қўшимча сақлаш қонунлари асосида боғловчи дифференциал айниятларни дивергент кўринишда исботлаш; текислик ҳолида оқим функцияси учун Монж-Ампер тенгламалар системасини шакллантириш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[2]. Кўп фазали муҳитларни математик моделлаштиришга қаратилган илмий тадқиқотни аналитик ва сонли усуллар ёрдамида ечиш, ҳисоблаш алгоритмлари ва дастурий таъминотини ишлаб чиқиш бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Massachusetts Institute of Technology, Columbia, ва California Institute of Technology, University of Texas, University of California, Berkeley ва Harvard University университетлари (АҚШ), Schlumberger Company, Baker Huges, Cambridge University (Буюк Британия), University of Zielona Gora (Польша) Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (Германия), Tsinghua University, Beijing, Zhejiang University, Hagzhou, Shandong University (Хитой), Kyungpook National University (Жанубий Корея), Физика-техника институти (Санкт-Петербург), Гидродинамика институти, Иссиқлик физикаси институти, Математика институти СБ РФА, Москва Давлат университети (Россия), Киев Миллий университети (Украина) да олиб борилмоқда.

Кўп фазали муҳитларни «А» аналитик функциялар асосида математик моделлаштириш усулларини такомиллаштиришга оид жаҳонда олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: ўрта қиймат усулига асосланиб ўзаро киришадиган континумлар динамикаси моделини ишлаб чиқиш алгоритми яратилган (Cambridge University); энтропиянинг локал аддитивлиги, энергия икки ички ва кинетик энергияларга бўлиниши, тизимости термодинамик мувозанатни локал сақланиши, манбаларнинг тенг муносабатга эгалиги исботланган (Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics); кўп фазали муҳитларни математик моделлаштириш ва тизимда умумий бўлган

---

[2]Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи http://www.eriez.com/, http://docs.lib.purdue.edu/, http://www.cargocaresolutions.com/, http://www.sciencedirect.com/, http://link.springer.com/, http://www.iccm-central.org/, http://www.digitimes.com/, https://www.ihs.com/ ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

маълумотларни сақланиш қонуниятлари ишлаб чиқилган (Kyungpook National University).

Дунёда бугунги кунда эллиптик чегаравий масалаларни чегарада берилган тенгламалар маълумотларидан фойдаланиб эллиптик тенгламаларни аналитик функциялар ёрдамида ечиш, функциялар назариясининг чегаравий масалаларини тадқиқ қилиш бўйича қатор, жумладан, ярим фазода эластик ғовакнинг стационар тенгламалар системаси учун Миндлин масаласи ечимини олиш; икки тезликли гидродинамика тенгламаларида тезлик, босим ва оғирлик кучини қўшимча сақлаш қонуниятлари асосида боғловчи дифференциал айниятларни дивергент кўринишда исботлаш; текислик ҳолида оқим функцияси учун Монж-Ампер тенгламалар системасини шакллантириш ва ечиш усулларини ишлаб чиқиш каби устувор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. А.Л.Бухгейм, Э.В.Арбузов, С.Г.Казанцев, Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, И.М.Халатников, S.P.Patterman, А.М.Блохин, В.Н.Доровскийлар томонидан ҳусусий ҳосила билан берилган дифференциал тенгламаларни тадқиқ қилиш комплекс ўзгарувчили функциялар назариясини, аналитик функциялар учун сингуляр интеграл тенгламалар назарияси усуллари, бир фазали муҳитларда комплекс ўзгарувчили аналитик функциялар асосида бир тезликли гидродинамик тадбиқий жараёнларнинг математик моделлари ишлаб чиқилган.

Математик физика тескари масалаларига боғлиқ интеграл геометрия масаласи М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, Ю. Е. Аниконовлар томонидан тадқиқ этилган, ҳамда А.Л.Бухгейм, Э.В.Арбузов ва С.Г.Казанцевлар томонидан эмиссион томография масаласи А-аналитик функция учун Коши формуласи ёрдамида ўрганишга келтирилган. Ω соҳа $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ яримтекислик бўлган ҳолда Ламе тенгламалар системаси учун Карлеман формулалари Е.В. Арбузов ва А.Л. Бухгеимлар томонидан топилган. Лаплас тенгламаси учун Коши масаласининг ечими Н.Е.Кочин, А.М.Лаврентьев, Ш.Ярмухамедов, Л.А.Айзенберг, А.М.Кытманов ва А.П.Солдатовлар томонидан топилган.

И.Э.Ниезов ишларида махсус соҳалар кўринишидаги Карлеман функцияси ёрдамида Ламе тенгламалар системаси учун Коши масаласининг ечими олинган. J.B.Diaz, L.E.Payne, Р.Д.Миндлин, А.М.Блохин, В.Н.Доровский, Х.Х.Имомназаровлар томонидан ярим фазода эластик ғовакнинг стационар тенгламалар системаси учун тўлқинли майдонга турли динамик характеристикаларнинг таъсирини сонли тадқиқот қилиш алгоритмини яратиш усуллари ишлаб чиқилган. Т.Юлдашев, Б.К.Курманбаев, Б.Х.Хужаёровларнинг тадқиқотларида кўп фазали муҳитларни математик моделлаштиришда ва тизимда умумий бўлган маълумотлардан фойдаланиш, сақланиш қонуниятлари кўрсатилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг ОТ-Ф1-116

«Геометрик функциялар назариясининг муаммолари ва аналитик давом эттириш масалалари» (2007-2011 йиллар) ва Ф-4-31 «Плюрипотенциаллар назарияси ва кўп ўлчовли анализда интеграл формула орқали ифодалаш» (2011-2016 йиллар) мавзуларидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади икки фазали муҳитларда «А» комплекс ўзгарувчили аналитик функциялар асосида сиқилувчан икки фазали муҳитларнинг икки тезликли гидродинамик тадбиқий жараёнларини математик моделлаштиришдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

комплекс ўзгарувчили аналитик функциялар «$A(z)$» операторининг умумийлаштириш усуллари ва икки фазали муҳитларнинг тадбиқий масалаларини ечиш;

шарнинг (доиранинг) ихтиёрий ички нуқтасидаги эластик ғовакнинг стационар тенгламалар системаси ечимини сферадаги (айланадаги) қийматлар билан боғловчи, ўрта қиймат ҳақидаги интеграл муносабатларини – Пуассон интеграл формуласини умумлаштириш;

ярим фазода эластик ғовакнинг стационар тенгламалар системаси учун Миндлин масаласи ўхшашлиги ечимини топиш ва тўлқинли майдонга турли характеристикалар таъсирини сонли тадқиқ қилиш алгоритмини яратиш;

босим бўйича фазалар мувозанатли икки тезликли гидродинамика тенгламаларида тезлик, босим ва оғирлик кучини қўшимча сақлаш қонуниятлари асосида боғловчи дифференциал айниятларни дивергент кўринишда исботлаш;

текислик ҳолатида оқим функцияси учун Монж-Ампер тенгламалар системасини шакллантириш ва хусусий ҳоллари учун умумий ечимини топиш;

иккита скаляр функциялар ёрдамида моддаларни ҳажмли тўйинганлиги доимий бўлган, босим бўйича фазаларнинг мувозанат ҳолати учун икки тезликли ёпишқоқ сиқилувчан бўлмаган суюқликлар оқимининг дифференциал тенгламалар системасини умумий ечимларини топиш ва сонли моделлаштириш усулини ишлаб чиқиш.

Тадқиқотнинг объекти комплекс ўзгарувчили аналитик функциялар **«**A(z)**»** ва сиқилмайдиган ёпишқоқ икки тезликли муҳут оқимининг тавсифини ҳосил қилиш жараёнларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети икки фазали муҳитларни «А» аналитик функциялар асосида тўлқин майдонига таъсир этадиган физик параметрлар (эластик параметр, ғоваклик) муносабатларини ифодалашда қўлланиладиган математик моделлар, аналитик алгоритмлар ва дастурий воситалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик ва сонли моделлаштириш, функционал анализ, комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, ҳисоблаш математика, математик физик тенгламалар ва ҳисоблаш экспериментларини ўтказиш усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

комплекс ўзгарувчили аналитик функциялар «A(z)» назариясининг оператор ўхшашликлари усуллари ва икки фазали муҳитларнинг тадбиқий масалаларини ечиш алгоритми ва механизми ишлаб чиқилган;

аналитик функцияларнинг классик умумлашмаси «A(z)» учун Коши, Монтель, Пикарнинг катта теоремалари исботланган ҳамда Тейлор ва Лоран қаторларига ёйиш механизми ишлаб чиқилган;

шарнинг ихтиёрий ички нуқтасидаги эластик ғовакнинг стационар тенгламалар системаси ечимини сферадаги қийматлар билан боғловчи, ўрта қиймат ҳақидаги интеграл муносабатларни – Пуассон интеграл формуласини умумлаштириш усуллари ишлаб чиқилган;

ярим фазода эластик ғовакнинг стационар тенгламалар системаси учун Миндлин масаласи ўхшашлиги ечими олинган ва тўлқинли майдонга турли динамик характеристикаларнинг таъсирини сонли тадқиқ қилиш алгоритми топилган;

босим бўйича фазалар мувозанатли икки тезликли гидродинамика тенгламаларида тезлик, босим ва оғирлик кучини қўшимча сақлаш қонуниятлари асосида дивергент кўринишга эга боғловчи дифференциал айниятлар исботланган;

Монж-Ампер тенгламалар системасининг хусусий ҳоли учун текислик ҳолатида оқим функциясининг умумий ечимини қуриш усуллари ишлаб чиқилган;

иккита скаляр функциялар ёрдамида моддаларни ҳажмли тўйинганлиги доимий бўлган, босим бўйича фазаларнинг мувозанат ҳолатида икки тезликли ёпишқоқ сиқилувчан бўлмаган суюқликларнинг оқими учун дифференциал тенгламалар системаси ва сонли модели ишлаб чиқилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари кўп фазали геологик ва технологик системаларда стационар жараёнларни моделлаштириш усулларини ишлаб чиқилганлигидан; тоғ жинсларидаги локал сейсмик ходисалар билан боғлиқ ғовак босими ва деформация майдонларини таҳлил қилишда ҳар хил сейсмик манбалардан ҳосил қилинувчи дилатансия соҳаларининг ҳисоблаш алгоритмларидан, шунингдек, турли технологик системалар доирасида сиқилувчан икки фазали муҳитлар оқими режимини ўзгартириш ва назорат қилиш усуллари ишлаб чиқилганлигидан; ўрта қиймат ҳақидаги ифодалар асосида ҳисоблаш алгоритмини қуриш услубияти ва мос дифференциал тенгламаларни ечимини олдиндан баҳоланганлигидан иборатдир.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги услубий жиҳатдан тенгламалар гиперболиклигини таъминловчи ёндошувлар асосидаги математик моделларнинг корректлиги ва уларнинг термодинамика қонуниятлари билан мутаносиблиги, математик моделлаштириш асосларининг қатъийлиги, асосланган усуллардан фойдаланилган ҳолда тенгламалар ечимларини олиниши, шунингдек, олинган ечимларнинг бир фазали муҳитлардагига оид илмий-тадқиқот ишлари билан солиштирилиши, ҳамда ҳисоблаш экспериментлари натижаларини умумқабул қилинган мезонлар асосида айнан берилганлар билан қиёсий таҳлили билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти кўп фазали системалар тўлқин динамикасининг истиқболли ривожланишини, комплекс ўзгарувчили аналитик функциялар «A(z)» назариясининг оператор ўхшашликлари усуллари қўлланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти босим бўйича фазалар мувозанатли икки тезликли гидродинамика тенгламаларида тезлик, босим ва оғирлик кучини қўшимча сақлаш қонуниятлари асосида дивергент кўринишга келтириш, тоғ жинсларидаги локал сейсмик ходисалар билан боғлиқ ғовак босими ва деформация майдонларини таҳлил қилишда ҳар хил сейсмик манбалардан ҳосил қилинувчи дилатансия соҳаларининг ҳисоблаш алгоритмларини ишлаб чиқиш, тажрибавий тадқиқот натижаларини тушунишни ва тавсифлаш усулларини такомиллаштиришга асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

Коши–Риман тенгламасининг оператор ўхшашлигига асосланган кўп фазали муҳитларни математик моделлаштириш усуллари 1.3.1.3 грант лойиҳасида тўйинтирилган суюқликдаги ғовак муҳитда дилантасия майдонларини қуруш учун қўлланилган (Россия фанлар академиясининг Сибир бўлими ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институтининг 2016 йил 3 ноябрдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши эластик ғовакли стационар тизимлар учун тўғри ва тескари масалаларни ечишда Миндлина ўхшашликлари асосида яратилган Карлеман формуласи Ер ҳақидаги математик моделларни яратиш ва тадқиқ этиш имконини берган;

фазаларнинг тўйинтирилган ҳажми ўзгармас бўлганда босим бўйича мувозанатлашган ҳолат учун икки тезликли сиқилмайдиган ёпишқоқ муҳитларда оқимни икки скаляр функция ёрдамида тавсифлаш формуласи VII.67.1.3 грант лойиҳасида гетеро фазали муҳитларда конвектив оқимларни моделлаштиришда фойдаланилган (Россия фанлар академиясининг Сибир бўлими геология ва минерология институтининг 2016 йил 22 ноябрдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши гетеро фазали муҳитларда конвектив оқимларни моделлаштириш усуллари тўйинтирилган суюқликдаги ғовак муҳитда дилантасия майдонларини қуриш имконини берган;

ғовак-эластиклик тенгламаларининг стационар системаларининг шарнинг ихтиёрий ички нуқтасидаги ечимларини сферадаги қийматлари билан боғловчи ўрта қиймат ҳақидаги муносабатлар 0115РК00542 грант лойиҳасида икки тезликли гидродинамика масалаларини моделлаштиришда қўлланилган (Қозоғистон Республикаси фан ва таълим вазирлиги Ахборот ва ҳисоблаш технологиялари институтининг 2016 йил 23 ноябрдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши икки тезликли гидродинамика масалаларини моделлаштириш усуллари тўйинтирилган суюқликдаги ғовак яриммуҳитларда дилатансия майдонларини яратиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 20 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 10 та халқаро ва 10 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 42 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 23 та мақола, жумладан, 15 таси хорижий ва 8 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, бешта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар руйхати ва иловалардан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 200 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯ ИШИНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссератациянинг «**Икки тезликли муҳитда динамик тенгламалар»** деб номланувчи биринчи боби сиқилувчан икки фазали муҳитларни икки тезликли моделларининг динамика тенгламалари системасини чизиқли термодинамикани қайтариб бўлмайдиган жараёнларининг сақлаш қонунлари ва тамойиллари усулларидан фойдаланиб, батафсил келтириб чиқилиши берилган ҳамда икки фазали муҳитнинг изотроп ҳолида ҳолат тенгламаларни тадқиқ қилишга бағишланган. Шунингдек эластик ғовакли жисм тезликлари ва ғовак босими тушунчаларида суюқлик билан тўйинган ғовакли муҳитларнинг чизиқланган тенгламалар системаси олинган ҳамда бир босимли икки суюқликли муҳит динамикасининг термодинамик келишилган системаси келтирилган.

Диссератациянинг «**Эластик ғовакликнинг стационар системаси учун Коши масаласи ечимида аналитик функция «А» ларнинг қўлланилиши»** деб номланувчи иккинчи боби аналитик функция «А» тушунчаси, у билан боғлиқ квазиконформ акслантиришлар назарияси ва олинган натижаларнинг кўп фазали муҳитларнинг бази амалий масалаларини ечишга татбиғига бағишланган. Кўчиш ва ғовак босими тушунчаларида ғовакли эластик стационар системаси учун Коши масаласини ечишда аналитик функция «А» ларнинг қўлланилиши кўрсатилган. Ғовакли муҳит ва ғоваклиликнинг эластик параметрларини таъсирини кўрсатадиган ечим учун Карлеман формуласи олинган.

Айтайлик, Ω – комплекс текислик $\mathbb{C}$ дан олинган ихтиёрий чегараланган бир боғламли соҳа, чегараси C^{∞} снифдан олинган ва $M \subset \partial\Omega$ – чекли сондаги ёпиқ ёйлар бирлашмасидан иборат. Ω да иккинчи тартибли эллиптик система учун Коши масаласини қараймиз:

$$\begin{gathered} \mathcal{A}\frac{\partial^2}{\partial x^2}V + 2\mathcal{B}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}V + \mathcal{C}\frac{\partial^2}{\partial y^2}V = 0,\ V:\Omega \to R^n \\ V(x,y)\big|_M = F(x,y),\ P_\partial V(x,y)\big|_M = G(x,y), \end{gathered} \qquad (1)$$

Бу ерда $V(x,y) \in C^2(\Omega;R^n) \bigcap C^1(\overline{\Omega};R^n)$ – вектор қийматли функция, $F(x,y), G(x,y) \in C(\Omega;R^n)$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – n-ўлчовли квадрат матрица, P_∂ – бринчи тартибли дифференциал оператор (масалан эластик ғовак муҳитнинг тенгламалар системаси учун кучланиш оператори ёки нормал бўйича ҳосила). Система эллиптик, яъни $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ лар тескариланувчи матрицалар ва характеристик кўпҳад

$$\det\left\|\mathcal{A} + 2\mathcal{B}\lambda + \mathcal{C}\lambda^2\right\| = 0$$

тенглама хақиқий ечимга эга бўлмайди.

$u:\Omega \to C^n$ аналитик функция «A» бўлиб, «A» нильпотент матрица ($A^n = 0$) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ системанинг коэффициентлари билан ифодаланади, u функция $z_\lambda = x + \lambda y$ ўзгарувчига боғлиқ ва λ-характеристик кўпҳаднинг илдизи бўлсин. Шундай қилибюқоридаги системанинг ечимини топиш

$$\overline{\partial}_A u(z) := \partial_{\bar z} u(z) - A\partial_z u(z) = 0,\ \ u(z)\big|_M = f(z)$$

аналитик функция«A»ни топиш масаласига келади.

Теорема 1. Агар λ_1, λ_2-лар характеристик кўпҳаднинг илдизи бўлиб $\mathrm{Im}\ \lambda_i > 0$ бўлса, у ҳолда юқоридаги системанинг ечими қуйидаги формула билан топилади

$$V = \mathrm{Re}\,\Theta u$$

бунда $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$ лар матрица (Θ_i – унинг устунлари) ва $u(z) = (\mathrm{u}_1(\mathrm{z}), \mathrm{u}_2(\mathrm{z}))$ қуйидагича аниқланади:

а) агар $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ бўлса, у ҳолда Θ_1, Θ_2 устунлар қуйидаги тенгламалар системаси билан топилади

$$\begin{gathered} A\Theta_1 + 2B\lambda\Theta_1 + C\lambda^2\Theta_1^2 = 0, \\ A\Theta_2 + 2B\lambda\Theta_2 + C\lambda^2\Theta_2^2 + 2\left(A + B(\lambda + \bar\lambda) + C\lambda\bar\lambda\right)\Theta_1 = 0, \end{gathered}$$

функция $u(z) = (\mathrm{u}_1(\mathrm{z}), \mathrm{u}_2(\mathrm{z}))$ эса қуйидаги тенгламанинг ечими бўлади

$$\left(\partial_x - \frac{1}{\lambda}\partial_y\right)u(\mathrm{z}) - \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\alpha}{2\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\left(\partial_x + \frac{1}{\lambda}\partial_y\right)u(\mathrm{z}) = 0, \quad \alpha = \bar\lambda - \lambda;$$

б) агар $\lambda_1 \neq \lambda_2$ бўлса, унда устунлар Θ_1, Θ_2 қуйидаги тенгламадан топилади

$$A\Theta_i + 2B\lambda\Theta_i + C\lambda^2\Theta_i^2 = 0, \quad i = 1,2,$$

функция компонентлари $u(z) = (u_1(z), u_2(z))$ қуйидаги тенгламанинг ечимлари бўлади

$$\partial_x u_i - \frac{1}{\lambda_i}\partial_y u_i(z) = 0, \quad i = 1,2.$$

Бу ерда текисликнинг чегараси силлиқ ихтиёрий чегараланган соҳасида стационар эластик ғовакликнинг тенгламалар системаси учун Карлеман типидаги формула асосида Коши масаласи ечилган

Бирор $\Omega \subset \mathbb{C}$ сохада текис изотроп эластик-деформацияланадиган муҳитни тавсифлайдиган стационар эластик ғовакликнинг тенгламалар системаси учун Коши масаласини (U, P) тушунчасида қарайлик:

$$\mu\Delta\mathbf{U} + (\lambda + \mu)\nabla div\mathbf{U} = 0, \; \mathbf{U}\big|_M = G(x), \; T_\partial\mathbf{U}\big|_M = H(x),$$

$$\Delta P = 0, \; \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} P\big|_M = P_0(x), \; \left.\frac{\partial P}{\partial \nu}\right|_M = 0. \tag{2}$$

Бу ерда $\tilde{\lambda}$, μ – ғовак муҳитдаги ўзгармас, $\mathbf{V}(V_1, V_2)$ – кўчиш вектор, T_∂ – кучланиш оператори, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ ташқи нормал вектор учун аниқланадиган тенглик $T_\partial\mathbf{V}\big|_M = \sigma\upsilon\big|_M$ ва σ тензор кучланиш, элементлари кўчиш вектор $\mathbf{V}(V_1, V_2)$ билан Гук муносабатларини боғлайди

$$\sigma_{xx} = \lambda\left(\partial_x V_1 + \partial_y V_2\right) + 2\mu\partial_x V_1$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\left(\partial_x V_1 + \partial_y V_2\right) + 2\mu\partial_y V_2$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu\left(\partial_y V_1 + \partial_x V_2\right) + 2\mu\partial_x V_1$$

Қуйидагини осон кўрсатиш мумкин,

$$T_\partial = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\upsilon_1 & \mu\upsilon_2 \\ \lambda\upsilon_2 & \mu\upsilon_1 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} \mu\upsilon_2 & \lambda\upsilon_1 \\ \mu\upsilon_1 & (\lambda + 2\mu)\upsilon_2 \end{pmatrix}\partial_y.$$

Нормал вектордан ўринма вектор $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ йўналишига ўтсак, T_∂ операторни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин

$$T_\partial = \tau_1\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}\partial_x + \tau_1\begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) \end{pmatrix}\partial_y +$$

$$+\tau_2\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\partial_x + \tau_2\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}\partial_y = T_{11}\tau_1\partial_x + T_{12}\tau_1\partial_y + T_{21}\tau_2\partial_x + T_{22}\tau_2\partial_y.$$

Қуйидаги теорема ўринли:

Теорема 2. Айтайлик, $\mathbf{U}(x, y) \in C^2(\Omega; R^n) \bigcap C^1(\Omega; R^n)$ $P(x, y) \in C^2(\Omega; R^n) \bigcap C^1(\bar{\Omega}; R^n)$ *функциялар (2) масаланинг ечими бўлсин. У ҳолда $\mathbf{V}(x, y)$, $P(x, y)$ лар қуйидаги формула билан топилади*

$$V = \mathrm{Re}\Theta u, \; P = \mathrm{Re}\tilde{\mathrm{P}},$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2k-1 \end{pmatrix}, \quad k = \frac{\tilde{\lambda}+3\mu}{\tilde{\lambda}+\mu},$$

бу ерда $\tilde{P}(z)$ *аналитик функция,* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *учун* $u(z)$ *аналитик функция* «A»*, қайсики* M *тўпламда қуйидаги қийматларни қабул қилади*

$$u\big|_M = f = g + ih,$$

бу ерда $g(z)$, $h(z)$ *функциялар қуйидаги системадан олинган*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\Theta & -\mathrm{Im}\Theta \\ \mathrm{Re}\Theta' & -\mathrm{Im}\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x) \\ h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(x) \\ \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} H(x,y)\,ds \end{pmatrix}, \quad \Theta' = 2\mu \begin{pmatrix} 1 & 2-k \\ i & -ik \end{pmatrix},$$

бу ерда $\tilde{P}(z)$ *ва* $u(z)$, $z = x + iy \in \Omega$ *функция қийматлари Карлеман типидаги формуладан топилади:*

$$u(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_M \left(e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(\zeta) + \left(N\left(\partial\phi_0(\zeta)\bar{\zeta} - \partial\phi_0(z)\bar{z}\right) + \overline{\frac{\zeta - z}{\zeta - z}} \right) \begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \right.$$

$$\left. - \int_M e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))} \begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right),$$

$$\tilde{P}(z) = \frac{\rho}{2\pi\rho_l i} \lim_{N\to\infty} \int_M P_0(\tau) \left[\frac{(\zeta - z_2)(z - z_1)}{(\zeta - z_1)(z - z_2)} \right]^{\frac{N}{\pi i}} \frac{d\tau}{\zeta - z}.$$

Карлеман типидаги формуладан шартли турғунликни баҳолаш келиб чиқади:

$$\left\| \mathbf{V}(x,y) \right\| \le \varepsilon l\left(f(z) \right) + c(\varepsilon) \left\| f(z) \right\|_M,$$

бу ерда $f(z)$ – $u(z)$ функциянинг чегаравий қиймати,

$$l\left(f(z) \right) = \left\| f(z) \right\|_{\left(\partial\Omega\setminus M;C^2\right)}, \qquad c(\varepsilon) = C\varepsilon^{1-\frac{c}{\psi(z)(e-1)}}$$

ва $\psi(z)$ – M тўпламнинг гармоник улчови.

Шунинг билан, агар Карлеман формуласидан фойдаланиб тақрибий қиймати $\mathbf{V}_N(x,y)$ ни $N > N_\varepsilon$ бўлганда аниқласак, у ҳолда хатолик қуйидагича бахоланади:

$$\left\| \mathbf{V} - \mathbf{V}_N \right\| \le \left\| \Theta \right\| \varepsilon,$$

Коши шартига кўра: яъни $G(z), H(z)$ лардан хатолик ε_0 дан катта эмас:

$$\varepsilon_0 \le C_1 \varepsilon^{\frac{2e}{(e-1)\psi(x)}}, \; C_1 = \frac{\rho_{M(z)}}{|M|} \left(\frac{|\partial\Omega \setminus M|}{\rho_{\partial\Omega\setminus M}(z)} \left\| f \right\| \right)^{1-\frac{2e}{(e-1)\psi(z)}} \left(\frac{\pi\psi^2(z)}{8\omega} \right)^{\frac{2e}{(e-1)\psi(z)}} \left\| \tilde{\Theta} \right\|.$$

Юқорида исботланган натижада қуйилган маслага бошқача ёндошилган ва бу ёндошув «А»-аналитик функция ёрдамида бажарилган бўлиб у текисликда чегараси бўлакли силлиқ бўлган соҳада ечим аниқ топилган.

Диссератациянинг «**Аналитик функция «A(z)» ва унинг хоссаларини тадқиқ қилиш»** деб номланувчи учинчи боби квазиконформим акслантришлар назарияси билан боғлиқ бўлган Бельтрами тенгламаси

$$f_{\bar{z}}(z) = A(z) f_z(z), \tag{3}$$

ечими билан таърифланадиган аналитик функциялар назариясига бағишланган. Асосан $A(z)$ функцияга нисбатан қаралаётган бўлиб, уни умумий ҳолда улчовли ва диярли қаралаётган $D \subset \mathbb{C}$ соханинг барча нуқталарида $|A(z)| \le C < 1$ шартни қаноатлантиради. Адабиётларда (3) тенгламанинг ечими «А»*аналитик функция деб аталади.*

Айтайлик $A(z)$ $-D \subset \mathbb{C}$ сохада бирор узлуксиз функция бўлсин. Қуйидаги операторни критамиз:

$$\partial_A = \partial - \overline{A(z)} \cdot \bar{\partial},$$

Бу ерда ∂ – z бўйича дифференциаланувчи оператор, $\bar{\partial}$ $-\bar{z}$ бўйича дифференциаланувчи оператор бўлсин.

Таъриф 1. Айтайлик, $f(z) - D$ *сохада дифференциалланувчи функция ва ҳар қандай* $z \in D$*учун*

$$\overline{\partial_A} f(z) = 0$$

тенгламани қноатлантирса, у ҳолда $f(z)$ D *сохада*$A(z)$*-аналитик функциядейилади, бу ерда*$\overline{\partial_A} = \bar{\partial} - A(z) \cdot \partial$.

Таъриф 2. Агар ихтиёрий $z \in D$ *да*

$$\partial_A f(z) = 0$$

ўринли бўлса, у ҳолда $f(z)$ D *сохада*$A(z)$*-антианалитик функциядейилади.*

Шуни такидлаймизки, агар $A(z) \equiv 0$ бўлса функция аналитик ва антианалитик бўлади.

Айтайлик, «А» антианалитик функция, $\partial A = 0,$ $D \subset \mathbb{C}$ сохада $|A(z)| \le C < 1,$ $\forall z \in D$ ўринли бўлса, қуйидагини ёзиб оламиз

$$D_A = \frac{\partial}{\partial z} - \bar{A}(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{D}_A = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

У ҳолда (3) га кўра «А» аналитик функциялар $f \in O_A(D)$ синфи $\bar{D}_A f = 0$ билан характерланади. Шундай қилиб антианалитик функциялар чексиз силлиқ бўлганлигидан $O_A(D) \subset C^\infty(D)$ эканлиги келиб чиқади.

Теорема 3 (Коши теоремасининг ўхшашлиги). Агар $f \in O_A(D) \cap C(\bar{D})$ *бўлса, бунда* $D \subset \mathbb{C} -$ ∂D *тўғриланувчи чегарадан иборат соха бўлса, у ҳолда* $\int\limits_{\partial D} f(z)\left(dz + A(z) d\bar{z}\right) = 0$ *бўлади.*

$D\subset\mathbb{C}-$ сохани қаварик деб фараз қиламиз ва $\xi\in D-$ фиксирланган нуқта.Қуйидаги функцияни қараймиз

$$K(z,\xi)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z-\xi+\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau}},$$

бу ерда $\gamma(\xi,z)-\xi,z\in D$ нуқталарни туташтрувчи силлиқ чизиқ. Шундай қилиб функция $D-$ бир-боғламли сохада ва функция $\bar{A}(z)-$ голоморф бўлса, у ҳолда интеграл $I(z)=\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau$ интеграллаш йўлига боғлиқ эмас ва бошланғич билан устма-уст тушади $I'(z)=\bar{A}(z)$.

Теорема 4. $K(z,\xi)$ *функция* $z=\xi$*, яъни* $K\in O_A(D\setminus\{\xi\})$ *да* $A-$*аналитик функция. Шу билан бирга* $z=\xi$ *нуқтада функция* $K(z,\xi)$ *биринчи тартибли полюсга эга.*

Изоҳ. Агар $D\subset\mathbb{C}$ соҳа қаварик бўлмаса фақат бир боғламли бўлса ҳам $\psi(z,\xi)$ функция D да бир қийматли аниқланган бўлсада, олдиндан, функциянинг бошқа $\xi:\psi(z,\xi)=0,\ z\in P=\{\xi,\xi_1,\xi_2,...\}$ дан бошқа яккаланган ноллари бўлиши мумкин. Бундан келиб чиқадики агар $z\notin P$ бўлса $\psi\in O_A(D),\ \psi(z,\xi)\neq 0$ ва $K(z,\xi)\,D\setminus P$ да $A-$аналитик функция бўлади. P нуқта фақат битта полюсга эга бўлади. Шунинг учун $A-$аналитик функциялар синфини фақат $D\subset\mathbb{C}$ қаварик сохада қараймиз.

$\psi(z,\xi)\in O_A(D)$ функция ички акслантришни амалга оширади. Хусусан, $\left\{z\in D:\ |\psi(z,\xi)|=\left|z-\xi+\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau}\right|<r\right\}$ тўплам D да очиқ тўпламни изохлайди. Етарлича кичик $r>0$ учун у Dда компакт ётади ва ξ нуқтани ўз ичга олади. Бу тўпламни маркази ξ бўлган $A-$*лемниската дейилади ва* $L(\xi,r)$ кўринишда белгилаймиз. Максимум принципига кўра лемниската $L(\xi,r)$ бир боғламли ва минимум принципга кўра у боғламли.

Маълумки, $K(z,\xi)\in L^1_{loc}(D),\ \forall\xi\in D$ва бринчи даражали дифференциал форма $\omega=K(z,\xi)(dz+A(z)d\bar{z})$биргаликда бринчи даражали оқимни қуйидаги формула билан аниқлайди

$$\omega\circ\alpha=\int\omega\wedge\alpha,\ \alpha\in F^1(D),$$

бу ерда $F^1(D)-D$ да чексиз силлиқ, финит сниф, бринчи даражали дифференциал форма.

Теорема 5. Дирак δ_ξ *улчови билан дифференциал оқим* $d\omega$ *устма-уст тушади, яъни* D *да чексиз силлиқ, ихтиёрий финитфункция* $\varphi\in F^0(D)$*учун қуйидаги тенглик ўринли*

$$d\omega\circ\varphi=\int\omega\wedge d\varphi=\varphi(\xi),\ \alpha\in F^0(D).$$

Теорема 6 (Коши формуласининг ўхшашлиги). Айтайлик, $D\subset\mathbb{C}-$ қавариқ соха ва $G\subset D-$ ∂G чегараси бўлакли силлиқ ихтиёрий қсим соха. У ҳолда ихтиёрий $f(z)\in O_A(G)\cap C(\overline{G})$ функция учун қуйидаги формула ўринли

$$f(z)=\int\limits_{\partial G}K(\xi,z)f(\xi)\left(d\xi+A(\xi)d\,\overline{\xi}\right),\ z\in G.$$

Аввалам бор, $A-$аналитик функция учун даражали қатор қуйидаги кўринишда бўлади

$$\sum_{j=0}^{\infty}c_j\psi^j(z,a),\ a\in D,\ c_j-\text{константа.}$$

Юқоридаги қаторнинг яқинлашиш соҳаси $L(a,r)=\left\{\left|\psi(z,a)\right|<r\right\}$ лемниската бўлади ва унинг яқинлашиш радиуси r Коши-Адамара формуласига кўра топилади: $\dfrac{1}{r}=\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\sqrt[j]{\left|c_j\right|}.$

Тескариси ўринли.

Теорема 7. Агар $f(z)\in O_A\left(L(a,r)\right)\cap C\left(\overline{L}(a,r)\right)$ бўлса, бунда $L(a,r)=\left\{\xi\in D:\ \left|\psi(\xi,a)\right|<r\right\}\subset\subset D-$ лемниската, у ҳолда $L(a,r)$ да $f(z)$ функция Тейлор қаторига ёйилади:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_j\psi^k(z,a),\tag{4}$$

бунда $c_k=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial L(a,\rho)}\dfrac{f(\xi)}{\left[\psi(\xi,a)\right]^{k+1}}\left(d\xi+A(\xi)d\,\overline{\xi}\right),\ 0<\rho<r,\ k=0,1,\ldots.$

Теорема 8 (Лоран қаторига ёйиш). Агар $f(z)$ функция $L(a,R)\setminus L(a,r)$ $r<R$ лемнискатадан иборат халқада A аналитик бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция шу ҳалқада Лоран қаторига ёйилади:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_j\psi^k(z,a),$$

бу ерда Тейлор-Лоран коэффициентлари (4) формула билан аниқланади ва қатор ҳалқа ичида текис яқинлашади.

Коши тенгсизлиги. Тейлор-Лоран коэффициентлари учун қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$\left|c_k\right|\le\frac{\max\left\{\left|f(z)\right|:\ z\in\partial L(a,\rho)\right\}}{\rho^k},\ r<\rho<R,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Қачонки $a-$ ўта махсус нуқта бўлса, Сохоцкий теоремаси ўринли, ҳар қандай W комплекс сон олганда $z_k\to a:\ f(z_k)\to W$ кетма-кетлик мавжуд бўлади. Маълумки, Лиувилл теоремасига кўра бутун текисликда антиголоморф $\left|A(z)\right|\le C<1$ шартни қаноатлантирувчи $A(z)$ функция ўзгармас бўлади. Шунинг учун, агар биз бутун $f(z)\in O_A(\mathbb{C})$ $A-$аналитик функцияни аниқласак, у ҳолда $A(z)\equiv C,\ |C|<1$ бўлади. Бундай бутун функция учун Пикар теоремаси ўринли, у шундай дейди: бутун $A-$аналитик функция $f\not\equiv const$ ва иккитадан бошқа барча қийматларини қабул қилади. $A-$аналитик функция учун қуйдаги мазмунли Пикарнинг катта теоремаси ўринли.

Теорема 9. Агар $a-f(z)$ $A-$аналитик функциянинг ўта махсус нуқтаси бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция $\overline{\mathbb{C}}$ кенгайтрилган комплекс текисликнинг иккитадан бошқа барча қийматларини қабул қилади.

Агар ихтиёрий унга $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda_0}$, $\Lambda_0\subset\Lambda$ қисим оила G нинг ички нуқталарида текис $\{f_j(z)\}\subset\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda_0}:\ f_j(z)\Rightarrow f(z),\ j\to\infty,$ яқинлашадиган қисимий кетма-кетликни ўз ичига олса, у ҳолда $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}\subset O_A(G)$ функциялар оиласи нормал дейилади.

Теорема 10 (Монтель). Локал текис чегараланган $A-$аналитик функциялар $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}\subset O_A(G)$ оиласи нормал оила ташкил этади.

Натижа 1. Агар ҳар бир $A-$аналитик функциялар $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}\subset O_A(G)$ оиласи иккита $a\in\mathbb{C},\ b\in\mathbb{C},\ a\neq b$ қийматни қабўл қилмаса, у ҳолда бу оила нормал бўлади.

Диссератациянинг «**Эластик ғоваклик системаси учун сферик ўрта қиймат муносабати»** деб номланувчи тўртинчи бобида эластик-ғовак статик холатдаги $\Omega\subset R^3$ муҳитда оммавий кучни ҳисобга олиб диссипация энергия қанашмаганда уни дифференциал тенгламалар системаси билан ифодалаш мукин

$$\begin{cases} L\mathbf{U}=-\dfrac{K}{\rho^3\hat{\alpha}+K}\rho\mathbf{f}, \\ \Delta P=F, \end{cases} \tag{5}$$

бунда $F=\rho\nabla\cdot\mathbf{f}$, $\tilde{\lambda}=\lambda-\dfrac{K}{\rho^3\hat{\alpha}+K}K$, L оператор куйидаги формула билан аниқланади $L\mathbf{U}=\mu\Delta\mathbf{U}+(\tilde{\lambda}+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{U}$.

Теорема 11 (ўрта қиймат хақидаги). Айтайлик Ω – ихтиёрий соха, $\mathbf{U}\in C^3(\Omega), P\in C^2(\Omega)$ – (4) системанинг ечими бўлса. У ҳолда ихтиёрий $U_R(\mathbf{r})\subseteq\Omega$ шар учун қуйидаги тенглик ўринли

$$\mathbf{U}(\mathbf{r})=\frac{3}{16\pi R^2(2-3\nu)}\oint\limits_{\Sigma_R(\vec{r})}\left[(1-4\nu)\mathbf{U}(\mathbf{q})+5\frac{\mathbf{p}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{U}(\mathbf{q}))}{R^2}\right]dS_q-$$

$$-\frac{\rho K}{\rho^3\hat{\alpha}+K}\frac{3-2\nu}{32\pi R^3\mu(1-\nu)(2-3\nu)}\int\limits_{U_R(\vec{r})}\left(R^2-p^2\right)\mathbf{f}(\mathbf{q})dV_q--\frac{\rho K}{\rho^3\hat{\alpha}+K}\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}.$$

$$\int\limits_{U_R(\mathbf{r})}\left[(3-4\nu)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{p}\right)\mathbf{f}(\mathbf{q})+\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{p^3}\right)\mathbf{p}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{q}))\right]dV_q, \qquad (6)$$

$$P(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi R^2}\oint\limits_{\Sigma_R(\mathbf{r})}P(\mathbf{q})dS_q+\frac{\rho}{4\pi}\int\limits_{U_R(\mathbf{r})}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{p}\right)\nabla\cdot\mathbf{f}(\mathbf{q})dV_q, \qquad (7)$$

бу ерда $\vec{p}=\vec{q}-\vec{r}$.

Теорема 12 (*ўрта қиймат ҳақидаги тескари теорема*). *Айтайлик* $\Omega\subset R^3$ *– ихтиёрий соха,* $\mathbf{U}\in C^3(\Omega), P\in C^2(\Omega)$ *ихтиёрий* $U_R(\mathbf{r})\subseteq\Omega$ *шар учун бу функциялар (5), (6) ўрта қиймат хақидаги муносабатни бажарса, у ҳолда* $\mathbf{U}$ *ва* P *функциялар (4) системанинг ечими бўлди.*

Эластик-ғовак жисм ва ғовак босимда тензор деформасия билан тензор кучланишни боғловчи формулани келтирамиз:

$$\sigma_{ik}=2\mu\varepsilon_{ik}+\lambda\delta_{ik}\varepsilon_{mm}-\alpha\delta_{ik}p, \quad i,k=1,2,3 \qquad (8)$$

$$\varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}\left(U_{i,k}+U_{k,i}\right), i,k=1,2,3, \qquad \varepsilon_{mm}=\sum_{n=1}^{3}\varepsilon_{nn}$$

бу ерда $\delta_{i,k}$ – Кронекер символи, $v_k=\dfrac{\partial v}{\partial x_k}$, $\tilde{\alpha}=1-\dfrac{K}{\alpha\rho^2}$.

Тензор деформасияга нисбатан (7) системани ечиб ғовак босимни ва тензор кучланиш билан тензор деформасияни боғловчи муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\varepsilon_{ik}=\frac{1}{2\mu}\sigma_{ik}-\frac{\delta_{ik}}{3\lambda+2\mu}\left(\frac{\lambda}{2\mu}\sigma_{mm}-\alpha p\right), \qquad i,k=1,2,3.$$

Ғовак босими ва тензор кучланишга нисбатан дифференциал тенгламалар системаси

$$\Delta\sigma_{ij}+\beta\sigma_{mm,ij}=\gamma p_{ij}, \quad i,j=1,2,3. \qquad (9)$$

$$\Delta P=0.$$

Шундай қилиб, ғовак босим ва тензор кучланиш мос равишда Лаплас тенгламасини ва (8) иккинчи тартибли тенгламалар системаси қаноатлантирар экан. Ғовак босими ва вектор кўчишга нисбатан эластик ғовак жисимда дифференциал тенгламалар системаси учун ўрта қиймат хақидаги теорема муносабати.Гармоник функция $p(x)$, $x\in\Omega$ учун ўрта қиймат ҳақидаги муносабат ўринли:

$$p(0)=\frac{\int_{S(0,R)}pd\Omega}{\int_{S(0,R)}1d\Omega}=\frac{1}{\omega_3}\int_{S(0,1)}pd\Omega(S). \qquad (10)$$

$$\sigma_{ij}(0)=\frac{3}{2\omega_3(5+2\beta)}\left[10(1-\beta)\int_{S(0,1)}\sigma_{ik}\frac{x_kx_l}{R^2}d\Omega-\right.$$

$$\left.-7\beta\delta_{ij}\int_{S(0,1)}\sigma_{ki}\frac{x_kx_l}{R^2}d\Omega+35\beta\int_{S(0,1)}\sigma_{ki}\frac{x_ix_jx_kx_l}{R^4}d\Omega\right]+$$

$$+\frac{15\alpha\left(2+5\beta\right)}{2\omega_3\left(2+5\beta\right)}\int_{S(0,1)} p\frac{x_i x_j}{R^2}d\Omega +$$
$$+\frac{15}{2\omega_3 R^5}\left(\alpha+\frac{7\gamma}{3\left(5+2\beta\right)}\right)\delta_{ij}\int_{W(0,R)}\eta^2 pdW +$$
$$+\frac{105\left(\alpha\beta+\gamma\right)}{3\left(5+2\beta\right)R^5}\int_{W(0,R)} px_i x_j dW-\frac{5\alpha}{2}\delta_{ij}p\left(0\right) \tag{11}$$

Теорема 13. Тенгламалар системаси учун ғовак босим ва тензор кучланишнинг дифференциал тенгламалар системасига нисбатан ўрта қиймат ҳақидаги (9), (10) муносабатлар ўринли.

Эластик-ғовакликнинг яримфазосида мўлжалланган куч масаласининг қўйилиши.

Масаланинг қўйилиши. Чегаравий шартлар билан

$$\sigma_{13}\big|_{x_3=0}=\sigma_{23}\big|_{x_3=0}=\frac{\rho_l}{\rho}\,p\big|_{x_3=0}=0.$$
$$p=\left(K-\rho\rho_s\alpha\right)div\mathbf{U}-\rho\rho_s\alpha div\mathbf{V}\,. \tag{12}$$

$x_3>0$ ярим фазода эластик-ғовак система

$$\begin{cases}\dfrac{\rho_s}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i}+\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{\partial\overline{h}_{ik}}{\partial x_k}=\rho_s f_i,\\[2ex] \dfrac{\rho_l}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i}=\rho_l f_i.\end{cases} \tag{13}$$

учун кўчиш ва босимни аниқлаш учун чегаравий статик масалани қараймиз, бу ерда $\mathbf{f}=(f_1,f_2,f_3)$ – куч массаси.

Эластик-ғовак жисимда вектор кўчиш $\vec{U}$, ғовак босими p эластиклик тенгламалар системасини ва мос равишда (12) Лаплас тенгламасини қаноатлантиради. (11) чегаравий шартдан $div\mathbf{V}\big|_{x_3=0}$ ни чиқарсак, ҳамда тензор кучланишни ва ғовак босимидан фойдаланилса, қуйидаги натижага эришилади:

$$\mu\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}+\frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{x_3=0}=0,$$
$$\mu\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}+\frac{\partial U_3}{\partial x_2}\right)\Bigg|_{x_3=0}=0,$$
$$2\mu\frac{\partial U_3}{\partial x_3}+\tilde{\lambda}div\mathbf{U}\Bigg|_{x_3=0}=0.$$

(11) ни ҳисобга олиб (12) системанинг иккинчи тенгламасидан Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласи ҳосил қилинади:

$$\Delta p = \rho div\mathbf{f}, \qquad x_3 > 0, \tag{14}$$

$$p\big|_{x_3=0} = 0. \tag{15}$$

Шундай қилиб, $\mathbf{f} = \mathbf{F}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)$ оддий куч бўлганда бошланғич чегаравий шартларда масала (бу ерда $\mathbf{F}$ – ўзгармас вектор, $\mathbf{x}^0$ – манбанинг координатаси) иккита бир-бирига боғлиқ бўлмаган масалаларга ажралди: Р.Миндлин ва Д.Чен (4), (14) ва Пуассон тенгламаси учун Дирихле (13), (14) масалаларига.

Шунингдек, эластик-деформасияланувчи ғовак муҳитда, тензор кучланиш σ_{ij} ни ҳисоблаш учун қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \left(1 - \frac{K}{\alpha\rho^2}\right)\delta_{ij}\, p, \quad i, j = x, y, z,$$

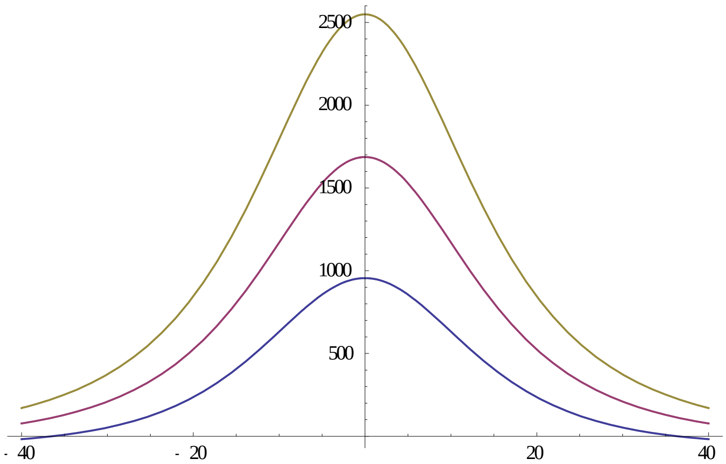
Бу ерда, $\tilde{\nu} = \dfrac{\tilde{\lambda}}{2(\tilde{\lambda}+\mu)}$ – Пуассон типидаги коэффициент, ғовак босими агар куч оддий бўлса қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$p = \rho\left[\frac{\left(F, x - x^0\right)}{\left|x - x^0\right|^3} - \frac{\left(F, x_- - x^0\right)}{\left|x_- - x^0\right|^3}\right], \tag{16}$$

бу ерда $x_- = (x_1, x_2, -x_3)$.

Шундай қилиб, эластик-деформасияланувчи ғовак флюидо-түйинтирилган яримфазо учун мўлжалланган куч таъсирида нуқтанинг кўчиш масаласининг ечимини Пуассон коэффициентлари ν ва λ ларни $\tilde{\nu}$ ва $\tilde{\lambda}$ ларга мос равишда алмаштириболиш мумкин. Ўринма тензор кучланиш компанентларини ҳам Пуассонкоэффициентлари ν ни $\tilde{\nu}$ га алмаштириб ҳисоблаш мумкин. Компонентларнинг нормал тензоркучланишини юқоридаги каби аниқлаш мумкин ҳамда (16) қўшимча билан.

Ғовкли ярим фазо учун Миндлин масаласини ечишда олинган формула асосида сонли хисоблашларга тадбиқининг натижасини қараймиз. Горизонтал текислик бўйлаб нормал кучланиш ва ғовакли босим тақсимотини, шунингдек ярим чексиз ғовакли жсим сиртининг вертикал бўйлаб силжиши сонли ҳисоблари келтирилган. Шунингдек кучланиш, ғовакли босим ва кучиши майдонига ғовакликнинг тасири ўрганилган.



1-Расм. Чегарага нормал куч тасирида сиртнинг ($c \cdot V_s^2 \cdot w$) вертикал силжиши (мовий $m = 20\%$, бинафша $m = 25\%$, сиёҳранг $m = 30\%$)

Диссератациянинг **«Сиқилмайдиган икки тезликли гидродинамикада уч улчовли уюрмали оқим»** деб номланувчи бешинчи бобида фазаларнинг тўйиниши доимий бўлган ҳолда фазаларнинг босим бўйича мувозанатли икки тезликли гидродинамиканинг динамик тенгламалари олишга бағишланган. Иккита скаляр функция ёрдамида босим бўйича мувозанатли ҳолат учун сиқилувчан бўлмаган ёпишқоқ икки тезликли суюқликларнинг оқими тавсифланган. Ҳусусан, дифференциал тенгламалар системасини олиш учун икки даврли Колмогоров оқимининг аналоглари олинган. Бу ечимлар мос дифференциал тенгламаларни сонли усуллар билан ечишда тажриба учун фойдали бўлиши мумкин. Босим бўйича фазалар мувозанатли икки тезликли гидродинамика тенгламаларида тезлик, босим ва оғирлик кучини боғловчи бир қанча дифференциал айниятлар олинган. Бу айниятларнинг баъзилари дивергент кўринишга эга ва баъзи (стационар) сақлаш қонунлари сифатида қаралиши мумкин. Ясси ҳаракат учун оқим функцияси Монж-Ампер тенгламалар системасини қаноатлантириши топилган. Ўзгарувчиларни умумлашган ажратиш усули асосида битта хусусий Монж-Ампер тенгламалар системаси учун умумий ечими қурилган.

Теорема 14. Агар $(\mathbf{v} \neq 0, \tilde{\mathbf{v}} \neq 0)$ *бир босимли ихтиёрий идеал икки тезликли система ҳаракати берилган бўлса унинг учун қуйдаги айният ўринли*

$$div\left[\frac{1}{v^2}\left\{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} div \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\bar{\rho}} - \frac{\tilde{\rho}}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\right)^2 - \mathbf{f}\right\}\right] = -2\frac{\sin\theta}{v}\left(\mathbf{v}\cdot\left(\nabla\alpha\times\nabla\theta\right)\right) = div\mathbf{S},$$

$$div\left[\frac{1}{\tilde{v}^2}\left\{\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} div \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\nabla p}{\bar{\rho}} - \frac{\rho}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\right)^2 - \mathbf{f}\right\}\right] = -2\frac{\sin\tilde{\theta}}{\tilde{v}}\left(\tilde{\mathbf{v}}\cdot\left(\nabla\tilde{\alpha}\times\nabla\tilde{\theta}\right)\right) = div\tilde{\mathbf{S}}.$$

Бундан ташқари, умумий сақланиш қонуни $\mathbf{v}(x,y,z,t)$, $\tilde{\mathbf{v}}(x,y,z,t)$ *ихтиёрий силлиқ вектор майдон учун ўринли ҳамда дифференциалформанинг сақлаш қонуни бажарилади*

$$div\left(\mathbf{G} + \mathbf{H}_i\right) = 0, \qquad div\left(\tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{H}}_i\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow div\left[\frac{1}{v^2}\left\{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}div\mathbf{v}+\frac{\nabla p}{\bar{\rho}}-\frac{\tilde{\rho}}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2-\mathbf{f}\right\}+\mathbf{H}_i\right]=0,$$

$$div\left[\frac{1}{\tilde{v}^2}\left\{\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t}+\tilde{\mathbf{v}}div\tilde{\mathbf{v}}+\frac{\nabla p}{\bar{\rho}}-\frac{\rho}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2-\mathbf{f}\right\}+\tilde{\mathbf{H}}_i\right]=0$$

ва оқим учун интеграл формалар ўринли $\iint\limits_S\left(\left[\mathbf{G}+\mathbf{H}_i\right]\cdot\boldsymbol{\eta}\right)dS=0,$ $\iint\limits_S\left(\left[\tilde{\mathbf{G}}+\tilde{\mathbf{H}}_i\right]\cdot\boldsymbol{\eta}\right)dS=0,\ i=1,2.$ Бу ерда вектор $\mathbf{H}_i\left(\tilde{\mathbf{H}}_i\right), \mathbf{v}(x,y,z,t),\ \tilde{\mathbf{v}}(x,y,z,t)$ тезликлар билан йўналган $\alpha(\tilde{\alpha}),\ \theta(\tilde{\theta})$ бурчаклар орқали ифодаланади, S – D соҳанинг бўлакли силлиқ чегараси, $\boldsymbol{\eta}$ – S га нормал.

Изотермик ҳолатдаги системада бир босимли тескариланувчи ҳолатда иккитезликли муҳитдаги ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}+div\left(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}}+\rho\mathbf{v}\right)=0,\qquad \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+div\left(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}}\right)=0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\left(\mathbf{v},\nabla\right)\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\bar{\rho}}+\frac{\tilde{\rho}}{2\rho}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2+\mathbf{f}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}+\left(\tilde{\mathbf{v}},\nabla\right)\tilde{\mathbf{v}}=-\frac{\nabla p}{\bar{\rho}}-\frac{\tilde{\rho}}{2\rho}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2+\mathbf{f}, \tag{18}$$

Бу ерда $\tilde{\mathbf{v}}$ ва $\mathbf{v}$ – тизимости вектор тезликлари, $\tilde{\rho}=\rho_s$ ва $\rho=\rho_l$ иккитезликли континиумни ташкил этувчи парциаль зичликлар мос равишда, $\bar{\rho}=\tilde{\rho}+\rho$ – континиумнинг умумий зичлиги; $\mathbf{f}$ – оғирликбирлигига келтирилган оғирлик кучи вектори;

$$p=p\left(\bar{\rho},\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2\right)$$

континиум ҳолатининг тенгламаси.

Теорема 15. $(\mathbf{v}=\mathbf{v}(x,y,t),\ \tilde{\mathbf{v}}=\tilde{\mathbf{v}}(x,y,t),\ v\neq 0,\tilde{v}\neq 0)$ *текисликдаги ҳаракат учун (16), (17) бир босимли икки тезликли гидродинамика тенгламалар системаси айният кўринишида ифодаланади*

$$\mathbf{G}=rot(\alpha(x,y,t)\mathbf{k}),\ \tilde{\mathbf{G}}=rot(\tilde{\alpha}(x,y,t)\mathbf{k})\Rightarrow div\mathbf{G}=0,\ div\tilde{\mathbf{G}}=0,$$

$$rot\mathbf{G}=-(\Delta\alpha)\mathbf{k},\ rot\tilde{\mathbf{G}}=-(\Delta\tilde{\alpha})\mathbf{k}\Rightarrow\Delta\ln v=div\mathbf{Q},\ \Delta\ln\tilde{v}=div\tilde{\mathbf{Q}},$$

$$(\Delta\alpha)\mathbf{k}=-rot\mathbf{Q},\ (\Delta\tilde{\alpha})\mathbf{k}=-rot\tilde{\mathbf{Q}},$$

бу ерда $\mathbf{G},\mathbf{Q},\tilde{\mathbf{G}},\tilde{\mathbf{Q}}$ *майдонлар қуйдагича аниқланади*

$$\mathbf{Q}\overset{def}{=}\frac{\mathbf{v}div\mathbf{v}+\mathbf{v}\times rot\mathbf{v}}{\left|\mathbf{v}\right|^2}=\nabla\ln\left|\mathbf{v}\right|+rot\left(\alpha\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{G}\overset{def}{=}\frac{1}{v^2}\left\{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}div\mathbf{v}+\frac{\nabla p}{\bar{\rho}}-\frac{\tilde{\rho}}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2-\mathbf{f}\right\}=\mathbf{S}=\left(\mathbf{Q}-\mathbf{P}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mathbf{G}+\mathbf{H}_i=rot\mathbf{F}_i,\qquad i=1,2$$

$$\tilde{\mathbf{G}} \stackrel{def}{=} \frac{1}{v^2}\left\{\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}div\tilde{\mathbf{v}} + \frac{\nabla p}{\bar\rho} - \frac{\rho}{2\bar\rho}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\right)^2 - \mathbf{f}\right\} = \tilde{\mathbf{S}} = \left(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{P}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{H}}_i = rot\tilde{\mathbf{F}}_i, \qquad i = 1,2.$$

Теорема 16. Монж–Ампер тнгламалар системаси

$$u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} = F, \qquad \tilde{u}_{xy}^2 - \tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{yy} = \tilde{F} \tag{19}$$

(умумий ҳолда $F, \tilde{F}$ $-x, y, u, \tilde{u}, u_x, \tilde{u}_x, u_y, \tilde{u}_y, u_{xx}, \tilde{u}_{xx}, u_{xy}, \tilde{u}_{xy}, u_{yy}, \tilde{u}_{yy}$ ларнинг силлиқ функция, t параметр) ва текисликда сиқилмайдиган муҳит ҳаракатининг ток функцияси учун тенгламалар системаси

$$\begin{aligned} -\left\{u_y\left(\Delta u\right)_x - u_x\left(\Delta u\right)_y\right\} &= \left(\Delta u\right)_t + \left(rot\mathbf{f}_1^* \cdot \mathbf{k}\right), \\ -\left\{\tilde{u}_y\left(\Delta \tilde{u}\right)_x - \tilde{u}_x\left(\Delta \tilde{u}\right)_y\right\} &= \left(\Delta \tilde{u}\right)_t + \left(rot\mathbf{f}_2^* \cdot \mathbf{k}\right), \end{aligned} \tag{20}$$

ўринли, бу ерда $\mathbf{f}_1^* = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\bar\rho} + \frac{\bar\rho}{2\bar\rho}\nabla w, \qquad \mathbf{f}_2^* = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\bar\rho} - \frac{\rho}{2\bar\rho}\nabla w,$

$w = \left(\tilde{u}_x - u_x\right)^2 + \left(\tilde{u}_y - u_y\right)^2$ *ўзаро қуйидагича боғланган: уларнинг чап қисми мос равишда дивергенсия ва ротор орқали* $\mathbf{V}, \tilde{\mathbf{V}}$ *вектор майдонларда*

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\nabla\left(u_x^2 + u_y^2\right) - \Delta u \nabla u = -\left(u_x^2 + u_y^2\right)rot(\alpha\mathbf{k}) =$$

$$= \left(u_y u_{xy} - u_x u_{yy}\right)\mathbf{i} + \left(u_x u_{xy} - u_y u_{xx}\right)\mathbf{j} = \left(\nabla u \times \nabla\right)\nabla u,$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \frac{1}{2}\nabla\left(\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2\right) - \Delta \tilde{u} \nabla \tilde{u} = -\left(\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2\right)rot(\tilde{\alpha}\mathbf{k}) =$$

$$= \left(\tilde{u}_y \tilde{u}_{xy} - \tilde{u}_x \tilde{u}_{yy}\right)\mathbf{i} + \left(\tilde{u}_x \tilde{u}_{xy} - \tilde{u}_y \tilde{u}_{xx}\right)\mathbf{j} = \left(\nabla \tilde{u} \times \nabla\right)\nabla \tilde{u},$$

кўринишда қуйидаги формула билан ифодаланади.

$$div\mathbf{V} = 2\left(u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}\right),\ rot\mathbf{V} = \left\{u_y\left(\Delta u\right)_x - u_x\left(\Delta u\right)_y\right\}\mathbf{k},$$

$$div\tilde{\mathbf{V}} = 2\left(\tilde{u}_{xy}^2 - \tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{yy}\right),\ rot\tilde{\mathbf{V}} = \left\{\tilde{u}_y\left(\Delta \tilde{u}\right)_x - \tilde{u}_x\left(\Delta \tilde{u}\right)_y\right\}\mathbf{k},$$

Айтайлик $\mathbf{v}(x,y,t) = u_y\mathbf{i} - u_x\mathbf{j}$, $\tilde{\mathbf{v}}(x,y,t) = \tilde{u}_y\mathbf{i} - \tilde{u}_x\mathbf{j}$, $p\left(x,y,t\right)$ функциялар $\sum : \left\{\left(x,y\right) \in D, t \in \left(t_1,t_2\right)\right\}$ соҳада текисликда сиқилмайдиган муҳит ҳаракати битта босим билан икки тезликли гидродинамик тенгламалар системаси (16), (17) ни қаноатлантирса, у ҳолда $\sum$ соҳада $u\left(x,y,t\right)$, $\tilde{u}\left(x,y,t\right)$ оқим функциялари $F = \frac{div\mathbf{f}_1^*}{2}$, $\tilde{F} = \frac{div\mathbf{f}_2^*}{2}$ кўринишига эга бўлиб, (18) ва (19) тенгламаларни қаноатлантиради.

Хусусан, $\rho = const$, $\tilde{\rho} = const$ бир жинсли мухит учун ва $\mathbf{f} = -\nabla U$ потенциал майдонда (18), (19) тенгламалар қуйидаги кўринишда бўлади

$$
\begin{aligned}
&\left(rot\mathbf{V}\cdot\mathbf{k}\right)=-\left\{u_y\left(\Delta u\right)_x-u_x\left(\Delta u\right)_y\right\}=\left(\Delta u\right)_t\\
&\left(rot\tilde{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{k}\right)=-\left\{\tilde{u}_y\left(\Delta\tilde{u}\right)_x-\tilde{u}_x\left(\Delta\tilde{u}\right)_y\right\}=\left(\Delta\tilde{u}\right)_t
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\frac{div\mathbf{V}}{2}=u_{xy}^2-u_{xx}u_{yy}=F,\qquad \frac{div\tilde{\mathbf{V}}}{2}=\tilde{u}_{xy}^2-\tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{yy}=\tilde{F} \tag{22}
$$

Бундан келиб чиқадики топилган $u(x,y,t)$, $\tilde{u}(x,y,t)$, ток функциялари маълум (20) тенгламалар системасининг ечими, ихтиёрий фиксирланган t учун бир вақтда (21) Монж–Ампер тенгламалар системасининг ҳам ечими бўлади. Агар ўнг томонини $\mathbf{v}=u_y\mathbf{i}-u_x\mathbf{j}$, $\tilde{\mathbf{v}}=\tilde{u}_y\mathbf{i}-\tilde{u}_x\mathbf{j}$ бўлса (16), (7) бир босимли икки тезликли гидродинамик тенгламалар системасидан топиш мумкин.

ХУЛОСА

Диссертацияда олинган илмий натижалар асосида қуйидаги хулосаларга келинди:

1. Комплекс ўзгарувчили аналитик функциялар «A(z)» назариясининг оператор ўхшашликлари усуллари ишлаб чиқилиши икки фазали муҳитларнинг баъзи тадбиқий масалаларини ечиш механизмини яратиш имконини беради.
2. Аналитик функцияларнинг классик умумлашмаси «A(z)» учун Коши, Монтель, Пикарнинг катта теоремаси исботланган ҳамда Тейлор ва Лоран қаторларига ёйилмаси механизми ишлаб чиқиш имконини беради .
3. Шарнинг (доиранинг) ихтиёрий ички нуқтасидаги эластик ғовакнинг стационар тенгламалар системаси ечимини сферадаги (айланадаги) қийматлар билан боғловчи, ўрта қиймат ҳақидаги интеграл муносабатлар Пуассон интеграл формуласини умумлаштиришусулини ишлаб чиқиш орқали аниқланади.
4. Тўлқинли майдонга турли характеристикаларнинг таъсирини сонли тадқиқ қилиш алгоритмлари ва усуллари ёрдамида ярим фазода эластик ғовакнинг стационар тенгламалар системаси учун Миндлин масаласи ўхшашлиги ечими олинади.
5. Босим бўйича фазалар мувозанатли икки тезликли гидродинамикасининг тенгламаларида тезлик, босим ва оғирлик кучини қўшимча сақлаш қонунлари асосида боғловчи дифференциал айниятлар топилган ва улар дивергент кўринишга эга бўлади.
6. Текислик холида оқим функциясининг Монж-Ампер тенгламалар системасининг хусусий ҳоли учун умумий ечими топилади.
7. Иккита скаляр функциялар ёрдамида моддаларни ҳажмли тўйинганлиги доимий бўлган, босим бўйича фазаларнинг мувозанат ҳолатининг дифференциал тенгламалар системаси ва сонли моделлаштириш алгоритм ва усуллари икки тезликли ёпишқоқ сиқилувчан бўлмаган суюқликларнинг оқимини ифодалайди.
8. Чуқур бўлмаган флюид системалар контурларида иссиқлик ва оғирлик ўтказиш, газ-суюқлик ва икки суюқлик аралашмаларнинг саноат транспортировка жараёнлари кўп фазали муҳитлар динамикасини коррект математик тавсифи табиий ва технологик жараёнларни башорат қилади. Икки фазали муҳитларнинг математик моделлари эндоген ва техноген турдаги мураккаб оқимларни ҳисоблаш усули коррект ечимларни олишни таъминлайди.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSC.27.06.2017.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА, ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ЖАББОРОВ НАСРИДИН МИРЗООДИЛОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ «А»

01.01.01 – Математический анализ
05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

город Ташкент – 2017 год

Тема диссертации доктора наук (Doctor of Science) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за №B2017.1.DSc./FM2.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Имомназаров Холматжон Худойназарович** доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник (Россия)
Официальные оппоненты:	**Меграбов Александр Грайрович** доктор физико-математических наук, профессор (Россия, НГТУ)
	Ганиходжаев Расул Набиевич доктор физико-математических наук, профессор
	Хужаёров Бахтиёр Хужаёрович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Казахский Национальный педагогический университет имени Абая**

Защита диссертации состоится «____» _____________2017 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, Института математики (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2017 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2017 года).

А.С.Садуллаев
Председатель Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., академик

Г.И.Ботиров
Ученый секретарь Научного совета по присуждению научных степеней, к.ф.-м.н.

М.М.Арипов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (Аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире многие научно практические исследования приводят к задачам создания математических моделей волновых процессов в флюидонасыщенных жидкостью пористых средах. Используется метод вытеснения нефти из резервуара с помощью жидкости (газа) или специальной смеси в пористой среде. Важно определение строгости в двумерном регулярном случае результатов основных граничных задач, гладкость нестационарных и стационарных решений определяют согласованность коэффициентов системы и строгость границы и граничных условий. Развитие исследований в этом направлении, в первую очередь, высоким требованием к надежной интерпретации данных сейсморазведки, гидроакустики и видео наблюдения является одной из важных задач.

В годы независимости в нашей стране усилено внимание к направлениям фундаментальной науки, имеющей практические применения, в частности, отдельно уделено внимание осуществлению широкого спектра мер по изучению процессов отражения, преломления и распространения акустических волн в слоистых средах, содержащих пористые флюидонасыщенные прослойки. В этой связи, в том числе, получены весомые результаты по проведению ряда научных исследований, посвященных свойствам волн движения насыщающей жидкости относительно скелета пористой среды, созданию моделей механики многофазных сред. Обозначены «Основные задачи и направления ведения научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математического анализа, прикладной математики и математического моделирования»[1]. Для обеспечения исполнения постановления имеет важное значение развитие математического и численного моделирования, теории функций комплексного переменного.

В настоящее время в мире усовершенствование математического моделирования прикладных процессов двухскоростной гидродинамики сжимаемых двухфазных сред на основе аналитических функций «А» комплексного переменного, метода обобщения интегральной формулы Пуассона – интегральных соотношений о среднем значении, которые связывают решение стационарной системы уравнений эластичной пористости со значениями на сфере и применение их на практике являются одной из важных задач. В этом смысле уделяется особое внимание целевым научным исследованиям, в том числе, является одной из важных задач осуществление научных исследований по следующим направлениям: разработка метода предсказания существования волн трех видов при исследовании звука в насыщенной пористой среде и являющегося одним из важных результатов, классификация продольных волны первого рода,

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии наук республики Узбекистан» от 18 мая 2017 года.

быстрой и медленной продольных волнам второго рода и третье поперечных волн или волн сдвига, получение решения стационарной системы уравнений эластичной пористости в полупространстве и создание алгоритма численного исследования влияния различных динамических характеристик на волновое поле; доказательство дифференциальных тождеств в дивергентном виде, связывающих с помощью дополнительных законов сохранения скорость, давление и силу массы в уравнениях двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению; создание системы уравнений Монжа-Ампера для функции тока в плоском случае. Проводимые научные исследования по вышеуказанному направлению научных исследований обосновывает актуальность темы данной диссертации.

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № ПП-916 от 15 июля 2018 года «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» и № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», а также других нормативно-правовых актов по данной деятельности.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2]. Научные исследования, направленные разработке математических моделей процессов многофазных сред, аналитических и численных методов решения, вычислительных алгоритмов, программных средств осуществляются в ведущих научных центрах и высших образовательных учреждениях мира, в том числе, ведутся в Massachusetts Institute of Technology, Columbia, и California Institute of Technology, University of Texas, University of California, Berkeley и Harvard University, Schlumberger Company, Baker Huges, Cambridge University (Великобритания), University of Zielona Gora (Польша) Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (Германия), Tsinghua University, Beijing, Zhejiang University, Hagzhou, Shandong University (Китай), Kyungpook National University (Южная Корея), Физико-техническом институте (Санкт-Петербург), Институте гидродинамики СО РАН, Институте физики тепла СО РАН, Институте математики СО РАН, Московском государственном университете (Российская Федерация), Киевском национальном университете (Украина), Национальном университете Узбекистана.

---

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации осуществляется на основе http://www.eriez.com/, http://docs.lib.purdue.edu/, http://www.cargocaresolutions.com/, http://www.sciencedirect.com/, http://link.springer.com/, http://www.iccm-central.org/, http://www.university-directory.eu, http://www.digitimes.com/, https://www.ihs.com/ и других источников.

В результате исследований, проведенных в мире по усовершенствованию методов математического моделирования многофазных сред на основе «A» аналитических функций, получены, в том числе, следующие результаты: на основе метода осреднения была получена модели динамики взаимопроникающих континуумов (Cambridge University, Великобритания); доказаны локальная аддитивность энтропии, делимость энергии на внутреннюю и кинетическую, сохранение подсистемой локального термодинамического равновесия, то, что источники имеют одинаковые соотношения (Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Германия); исследованы математическое моделирование многофазных сред и использование самых общих сведений о системе — законов сохранения, групповая инвариантность относительно преобразований Галилея, согласованность уравнений движения жидкости с термодинамическими условиями равновесия (Kyungpook National University, Южная Корея).

В мире на сегодняшний день осуществляется ряд исследований по приоритетным направлениям, как решение эллиптических краевых задач, используя данные уравнений на границе, решение эллиптических уравнений с помощью аналитических функций, исследование краевых задач теории функций, в том числе по следующим приоритетным направлениям: разработка метода обобщения интегральной формулы Пуассона – интегральных соотношений о среднем значении, которые связывают решение стационарной системы уравнений эластичной пористости со значениями на сфере; получение решения задачи Миндлина стационарной системы уравнений эластичной пористости в полупространстве; доказательство дифференциальных тождеств в дивергентном виде, связывающих с помощью дополнительных законов сохранения скорость, давление и силу массы в уравнениях двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению; разработка методов решения и формирования системы уравнений Монжа-Ампера для функции тока в плоском случае.

Степень изученности проблемы. Задачи создания и усовершенствования исследований с помощью теории функций комплексного переменного дифференциальных уравнений в частных производных, методов теории сингулярных интегральных уравнений для аналитических функций, математические модели прикладных процессов односкоростной гидродинамики на основе аналитических функций комплексного переменного в однофазных средах разработаны А.Л.Бухгеймом, Э.В.Арбузовым, С.Г.Казанцевым, Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшицем, И.М.Халатниковым, S.P.Patterman, А.М.Блохиным, В.Н.Доровским.

Задачи интегральной геометрии, связанные с обратными задачами математической физики исследованы М.М.Лаврентьевым, В.Г.Романовым, Ю.Е.Аниконовым, а также А.Л.Бухгеймом, Э.В.Арбузовым и С.Г.Казанцевым задача эмиссионной томографии приведена к изучению А-аналитических функций с помощью формулы Коши. Е.В.Арбузовым ва

А.Л.Бухгеймом найдены формулы Карлемана для системы уравнений Ламе в случае когда область Ω является полуплоскостью $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Решение задачи Коши для уравнения Лапласа найдены Н.Е.Кочиным, А.М.Лаврентьевым, Ш.Ярмухамедовым, Л.А.Айзенбергом, А.М.Кытмановым и А.П.Солдатовым.

В работах И.Э.Ниезова получено решение задачи Коши для системы уравнений Ламе с помощью функции Карлемана для специальных областей. J.B.Diaz, L.E.Payne, Р.Д.Миндлиным, А.М.Блохиным, В.Н.Доровским, Х.Х.Имомназаровым разработаны методы создания алгоритма численного исследования разных характеристик на волновое поле для стационарной системы уравнений пороупругости в полупространстве. В исследованиях Т.Юлдашева, Б.К.Курманбаева, Б.Х.Хужаёрова показаны использование общих сведений в математическом моделировании и системе, законы сохранения.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках плана научно-исследовательских работ Национального университета Узбекистана ОТ-Ф1-116 «Задачи аналитического продолжения и вопросы геометрической теории функции» (2007-2011); Ф-4-31«Теория плюрипотенциала и интегральные представления в многомерном анализе» (2012-2016).

Целью исследования является математическое моделирование прикладных гидродинамических процессов сжимаемых двухфазных сред на основе аналитических функций «А» комплексного переменного в двухфазных средах.

Задачи исследования:

разработка методов обобщения теории аналитической функции комплексного переменного оператора «A(z)», нахождение алгоритмов и способов решения некоторых прикладных задач для двухфазных сред;

разработка методов обобщения интегральной формулы Пуассона для стационарной системы пороупругости – интегральных соотношений о среднем, связывающих решения стационарной системы уравнения пороупругости в произвольной внутренней точке шара (круга) со значениями на сфере (окружности);

нахождение алгоритма получения решения аналога задачи Миндлина для стационарной системы уравнения пороупругости в полупространстве и численное исследование влияния разных характеристик на волновое поле;

исследовать в дивергентном виде дифференциальные тождества, связывающие скорости, давление и массовую силу в уравнениях двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению;

разработка алгоритма и методов для получения и общего решения для функции тока в плоском случае системы уравнений Монжа-Ампера;

разработка метода численного моделирования описания течения несжимаемых вязких двухскоростных жидкостей для случая равновесия фаз по давлению при постоянстве объемной насыщенности веществ с помощью двух скалярных функций.

Объектом исследования является развитие методов обобщения оператора Коши—Римана для аналитических функций «А» комплексного переменного и рассмотрение процессов возникновения классификации течения несжимаемой вязкой двухскоростной среды.

Предметом исследования являются математические модели, аналитические алгоритмы и программные средства, используемые для выражения соотношений влияния физических параметров (упругие параметры, пористости) на волновые поля двухфазных сред на основе «А» аналитических функций.

Методы исследования. В процессе исследования применены методы математического и численного моделирования, функционального анализа, теории функции комплексного переменного, вычислительной математики, уравнений математической физики и проведения вычислительного эксперимента.

Научная новизна исследования заключаются в следующем:

найдены методы обобщения теории аналитической функции комплексного переменного оператора «А», алгоритмы и способы решения некоторых прикладных задач для двухфазных сред;

доказаны теоремы Коши, Монтеля, большая теорема Пикара и разработаны механизмы разложения в ряды Тейлора и Лорана для классического обобщения аналитических функций «A(z)»;

разработаны методы обобщения интегральной формулы Пуассона для стационарной системы пороупругости – интегральных соотношений о среднем, связывающих решения стационарной системы уравнения пороупругости в произвольной внутренней точке шара (круга) со значениями на сфере (окружности);

найден алгоритм получения решения аналога задачи Миндлина для стационарной системы уравнения пороупругости в полупространстве и численное исследование влияния разных динамических характеристик на волновое поле;

доказаны в дивергентном виде дифференциальные тождества, связывающие скорости, давление и массовую силу в уравнениях двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению;

разработаны методы построения общего решения для функции тока в плоском случае системы уравнений Монжа-Ампера;

разработана численная модель для исследования процесса течения несжимаемых вязких двухскоростных жидкостей с учетом равновесия фаз по давлению, а так же при постоянстве объемной насыщенности веществ с помощью двух скалярных функций.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

усовершенствование методов определения операторного аналога теории аналитических функций комплексного переменного; разработаны методы исследования различных стационарных процессов в многофазных геологических и технологических системах; разработаны алгоритмы расчета областей дилатансии, генерируемых разными сейсмическими источниками, позволяет анализировать поля деформации и поровое давление в горных породах, связанные с локальными сейсмическими событиями, а так же способы изменения и контроля режимов течений сжимаемых двухфазных сред в рамках различных технологических систем; разработаны методика построения вычислительного алгоритма, основанного на соотношениях о среднем и методы априорных оценок решений соответствующих дифференциальных уравнений, а также метод сумматорных представлений.

Достоверность результатов исследования. Достоверность результатов исследования обосновывается корректностью математической модели на основе подхода, обеспечивающего гиперболичность уравнений модели и их согласованность с законами термодинамики, строгостью математических выкладок, использованием обоснованных методов решения, также путем сравнения полученных решений с точными решениями в аналогичных постановках для однофазных сред, а также сравнительным анализом результатов вычислительного эксперимента на основе общепринятых критериев с непосредственными данными.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов обосновывается перспективным развитием динамики волн многофазных систем, методов операторного аналога «A(z)» аналитических функций комплексного переменного.

Практическая значимость определяется приведением к дивергентному виду на основе дополнительных законов сохранения скорости, давления и силы массы в уравнениях двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению, разработкой вычислительного алгоритма областей дилатансии, образующихся из различных сейсмических источников при анализе порового давления и деформации полей, связанных с локальными сейсмическими событиями в горных породах, единым математическим обоснованием усовершенствования методов понимания и классификации результатов опытного исследования.

Внедрение результатов исследования. На основании математических моделей, созданных на основе «A» аналитических функций для двухфазных сред:

методы математического моделирования многофазных сред, основанные на операторном аналоге Коши-Римана применены для построения полей дилатансии в насыщенной жидкостью пористой среде в гранте 1.3.1.3 (справка от 3 ноября 2016 года Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук). Применение результатов исследования позволили создать и исследовать математические модели о Земле на основе полученной формулы Карлемана, на основе аналога Миндлина, использованная при решении прямых и обратных задач для стационарной системы пороупругости;

формула для описания течения несжимаемых вязких двухскростных сред, для случая равновесия фаз по давлению при постоянстве объемной насыщенности фаз с помощью двух скалярных функций применена для моделирования конвективных течений в гетерофазных средах в проекте гранта VII.67.1.3. (справка от 22 ноября 2016 года Института геологии и минералогии Сибирского отделения Российской академии наук). Применение результатов исследования позволили построить поля дилатансии в насыщенной жидкостью пористой среде на основе методов моделирования конвективных течений в гетеро фазных средах;

соотношения о среднем, связывающие решения стационарной системы уравнений пороупругости в произвольной внутренней точке шара со значениями на сфере использовались для моделирования задач двухскоростной гидродинамики в проекте гранта № 0115РК00542 (справка от 23 ноября 2016 года Института информационных и вычислительных технологий Министерства образования и науки Республики Казахстан). Применение результатов исследования позволили создать поля дилатансии в насыщенной жидкостью пористой полусреде на основе методов моделирования задач двухскоростной гидродинамики;

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждались на 20 научно-практических конференциях, в том числе, на 10 международных и 10 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано всего 42 научных работ, из них 1 монография, 23 научные статьи, в том числе 15 в зарубежных и 8 в республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций.

Объем и структура диссертации. Структура диссертации состоит из введения, пяти глав, заключения, список использованной литературы, приложений. Объем диссертации составляет 200 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность и востребованность проведенного исследования, цель и задачи исследования, характеризуются объект и предмет, показано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики, излагаются научная новизна и практические результаты исследования, раскрываются научная и практическая значимость полученных результатов, внедрение в практику результатов исследования, сведения по опубликованным работам и структуре диссертации.

Первая глава диссертации, под называнием **«Динамические уравнения в двухскоростных средах»** посвящена подробному выводу, с использованием метода законов сохранения и принципов линейной термодинамики необратимых процессов, системе уравнений динамики исследуемых в работе двухскоростных моделей сжимаемых двухфазных сред, исследуемых в работе. Получены уравнения состояния двухфазной среды в изотропном случае. Также получены системы линеаризованных уравнений насыщенных жидкостью пористых сред в терминах скоростей упругого пористого тела и порового давления. Также приведена термодинамически согласованная система динамики двухжидкостной среды с одним давлением.

Во второй главе диссертации, называемой **«Применение аналитических функций «А» в решении задачи Коши для стационарной системы эластичной упругости»** приведены понятие аналитических функций «А», связанная с ней теория квазиконформных отображений и применение полученных результатов к решению некоторых прикладных задач многофазных сред, показано применение аналитических функций «А» для решения задачи Коши для стационарной системы пороупругости в терминах смещений и порового давления. Получена формула Карлемана для решения, которая показывает влияние упругих параметров пористой среды и пористости.

Пусть Ω – произвольная ограниченная односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с границей класса C^{∞}, $M \subset \partial\Omega$ – объединение конечного числа замкнутых дуг. Рассмотрим задачу Коши для эллиптической системы второго порядка в Ω:

$$\mathcal{A}\frac{\partial^2}{\partial x^2}V + 2\mathcal{B}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}V + \mathcal{C}\frac{\partial^2}{\partial y^2}V = 0,\ V:\Omega \to R^n$$
$$V(x,y)\big|_M = F(x,y),\ P_{\partial}V(x,y)\big|_M = G(x,y), \tag{1}$$

где $V(x,y) \in C^2(\Omega;R^n) \bigcap C^1(\overline{\Omega};R^n)$ векторозначные функции, $G(x,y), F(x,y) \in C(\Omega;R^n)$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – постоянные квадратные матрицы размера n, T_{∂} является некоторым дифференциальным оператором первого порядка (например, оператором напряжения для системы уравнений пороупругости или производной по нормали). Система является эллиптической, т. е. матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ обратимы и характеристический полином

$$\det\left\| \mathcal{A} + 2\mathcal{B}\lambda + \mathcal{C}\lambda^2 \right\| = 0$$

не имеет вещественных корней.

Пусть $u:\Omega \to \mathbb{C}^n$ является аналитической функцией «A», где A нильпотентная матрица ($A^n = 0$) выражается через коэффициенты системы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и зависит от переменной $z_{\lambda} = x + \lambda y$, где λ – корень характеристического полинома. Таким образом, нахождение решения вышеуказанной системы сводится задаче нахождения аналитической функции «A»:

$$\overline{\partial}_A u(z) := \partial_{\bar{z}} u(z) - A\partial_z u(z) = 0,\ \ u(z)\big|_M = f(z).$$

Теорема 1. *Если* λ_1, λ_2 *– корни характеристического полинома с* $\operatorname{Im}\lambda_i > 0$, *то решение вышеуказанной системы находится по формуле*

$$V = \operatorname{Re}\Theta u,$$

здесь $\Theta=(\Theta_1,\Theta_2)$ *матрицы* ($\Theta_i -$ *ее столбцы) и функция* $u(z)=(u_1(z),u_2(z))$ *определяются следующим образом: а) если* $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, *то столбцы* Θ_1,Θ_2 *находятся из системы уравнений*

$$\mathcal{A}\Theta_1+2\mathcal{B}\lambda\Theta_1+\mathcal{C}\lambda^2\Theta_1=0,$$

$$\mathcal{A}\Theta_2+2\mathcal{B}\lambda\Theta_2+\mathcal{C}\lambda^2\Theta_2+2\left(\mathcal{A}+\mathcal{B}\left(\bar{\lambda}+\lambda\right)+\mathcal{C}\bar{\lambda}\lambda\right)\Theta_1=0,$$

а функция $u(z)=(u_1(z),u_2(z))$ *является решением уравнения*

$$\left(\partial_x-\frac{1}{\lambda}\partial_y\right)u(z)-\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{\alpha}{2\lambda}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\left(\partial_x+\frac{1}{\lambda}\partial_y\right)u(z)=0,\ \alpha=\bar{\lambda}-\lambda;$$

б) если $\lambda_1\neq\lambda_2$ *, то столбцы* Θ_1,Θ_2 *находятся из уравнений*

$$\mathcal{A}\Theta_i+2\mathcal{B}\lambda\Theta_i+\mathcal{C}\lambda^2\Theta_i=0,\ i=1,2,$$

а компоненты функции $u(z)=(u_1(z),u_2(z))$ *являются решениями уравнений*

$$\partial_x u_i-\frac{1}{\lambda_i}\partial_y u_i=0,\ i=1,2.$$

Здесь на основе полученных формул типа Карлемана решена задача Коши для стационарной системы уравнений пороупругости в произвольных ограниченных областях с гладкими границами на плоскости.

Рассмотрим задачу Коши для стационарной системы уравнений попроупугости в терминах (U,P), описывающей состояние плоской изотропной упруго-деформируемой среды в некоторой области $\Omega\subset\mathbb{C}$:

$$\mu\Delta\mathbf{U}+(\lambda+\mu)\nabla div\mathbf{U}=0,\ \mathbf{U}\big|_M=G(x),\ T_\partial\mathbf{U}\big|_M=H(x),$$

$$\Delta P=0,\ \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}P\big|_M=P_0(x),\ \left.\frac{\partial P}{\partial\nu}\right|_M=0. \tag{2}$$

где $\tilde{\lambda},\mu$ – константы в пористой среде, $\mathbf{U}=(U_1,U_2)$ – вектор смещения, T_∂ – оператор напряжения, $\nu=(\nu_1,\nu_2)$ внешний нормальный вектор, определяемый равенством $T_\partial\mathbf{U}\big|_M=\sigma\upsilon\big|_M$, где σ – тензор напряжения, элементы которого связаны с вектором смещения $\mathbf{V}(V_1,V_2)$ соотношениями Гука:

$$\sigma_{xx}=\lambda\left(\partial_x V_1+\partial_y V_2\right)+2\mu\partial_x V_1$$

$$\sigma_{yy}=\lambda\left(\partial_x V_1+\partial_y V_2\right)+2\mu\partial_y V_2$$

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\mu\left(\partial_y V_1+\partial_x V_2\right)+2\mu\partial_x V_1$$

Легко показать, что

$$T_\partial=\begin{pmatrix}(\lambda+2\mu)\upsilon_1 & \mu\upsilon_2\\ \lambda\upsilon_2 & \mu\upsilon_1\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}\mu\upsilon_2 & \lambda\upsilon_1\\ \mu\upsilon_1 & (\lambda+2\mu)\upsilon_2\end{pmatrix}\partial_y.$$

Переходя от вектора нормали к вектору касательного направления $\tau=(\tau_1,\tau_2)$, оператор T_∂ можно записать в виде

$$T_{\partial}=\tau_1\begin{pmatrix}0 & -\mu\\ -\lambda & 0\end{pmatrix}\partial_x+\tau_1\begin{pmatrix}-\mu & 0\\ 0 & -(\lambda+2\mu)\end{pmatrix}\partial_y+$$
$$+\tau_2\begin{pmatrix}\lambda+2\mu & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\partial_x+\tau_2\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ \mu & 0\end{pmatrix}\partial_y=$$
$$=T_{11}\tau_1\partial_x+T_{12}\tau_1\partial_y+T_{21}\tau_2\partial_x+T_{22}\tau_2\partial_y$$

Справедливо следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть функция* $\mathbf{U}(x,y)\in C^2(\Omega;\mathbf{R}^n)\bigcap C^1(\bar{\Omega};\mathbf{R}^n)$, $P(x,y)\in C^2(\Omega;R^n)\bigcap C^1(\bar{\Omega};R^n)$ *является решением задачи (2). Тогда* $\mathbf{U}(x,y)$, $P(x,y)$ *находятся по формуле*

$$\mathbf{U}=\mathrm{Re}\,\Theta u,\ P=\mathrm{Re}\,\tilde{P},\ \Theta=\begin{pmatrix}i & i\\ -1 & 2k-1\end{pmatrix},\ k=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu},$$

где $\tilde{P}(z)$ *– аналитическая функция, а* $u(z)$ *есть аналитическая функция «A» для* $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, *принимающая на множестве* M *значения* $u|_M=f=g+ih$, *где функции* $g(z)$, $h(z)$ *определяются из системы*

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\Theta & -\mathrm{Im}\,\Theta\\ \mathrm{Re}\,\Theta' & -\mathrm{Im}\,\Theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g(x)\\ h(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}G(x)\\ \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}H(x,y)\,ds\end{pmatrix},\ \Theta'=2\mu\begin{pmatrix}1 & 2-k\\ i & -ik\end{pmatrix},$$

где значения функции $\tilde{P}(z)$, $u(z)$, $z=x+iy\in\Omega$ *находятся по формулам типа Карлемана:*

$$u(z)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\cdot$$
$$\cdot\left(\int_M\left(e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}(\zeta)+\left(N\left(\partial\phi_0(\zeta)\bar{\zeta}-\partial\phi_0(z)\bar{z}\right)+\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}\right)\begin{pmatrix}f_2\\ 0\end{pmatrix}(\zeta)\right)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\right.$$
$$\left.-\int_M e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\begin{pmatrix}f_2\\ 0\end{pmatrix}(\zeta)\frac{d\bar{\zeta}}{\zeta-z}\right),$$

$$\tilde{P}(z)=\frac{\rho}{2\pi\rho_l i}\lim_{N\to\infty}\int_M P_0(\tau)\left[\frac{(\zeta-z_2)(z-z_1)}{(\zeta-z_1)(z-z_2)}\right]^{\frac{N}{\pi i}}\frac{d\tau}{\zeta-z}.$$

Из полученной формулы типа Карлемана следует оценка условной устойчивости:

$$\left\|\mathbf{U}(x,y)\right\|\le\varepsilon l\left(f(z)\right)+c(\varepsilon)\left\|f(z)\right\|_M,$$

где $f(z)$ – является граничным значением $u(z)$,

$$l\left(f(z)\right)=\left\|f(z)\right\|_{\left(\partial\Omega\setminus M;C^2\right)},\ c(\varepsilon)=C\varepsilon^{1-\frac{c}{\psi(z)(e-1)}}$$

и $\psi(z)$ – гармоническая мера множества M.

При этом, если, используя формулу Карлемана, мы приближенно вычислим значение $\mathbf{U}_N(x,y)$ при $N > N_\varepsilon$, то ошибка оценивается следующей величиной:

$$\|\mathbf{U}-\mathbf{U}_N\| \le \|\Theta\|\varepsilon,$$

при условии определения данных Коши $G(z), H(z)$ с погрешностью не более ε_0:

$$\varepsilon_0 \le C_1 \varepsilon^{\frac{2e}{(e-1)\psi(x)}},\ C_1 = \frac{\rho_{M(z)}}{|M|}\left(\frac{|\partial\Omega \setminus M|}{\rho_{\partial\Omega\setminus M}(z)}\|f\|\right)^{1-\frac{2e}{(e-1)\psi(z)}}\left(\frac{\pi\psi^2(z)}{8\omega}\right)^{\frac{2e}{(e-1)\psi(z)}}\|\tilde{\Theta}\|.$$

Доказанные выше результаты дают другой подход к решению поставленной задачи через «A» аналитические функции и позволяют найти формулу решения в явном виде в случае произвольной ограниченной области с кусочно-гладкой границей на плоскости.

Третья глава диссертации, под названием **«Аналитические функции «A» и исследование их свойств»** посвящена аналитической теории решения уравнения Бельтрами

$$f_{\bar{z}}(z) = A(z) f_z(z), \tag{3}$$

имеющей непосредственное отношение к квазиконформным отображениям. Относительно функции «$A(z)$», в общем случае предполагается, что она измерима и $|A(z)| \le C < 1$ почти всюду в рассматриваемой области $D \subset \mathbb{C}$. В литературах решения уравнения (3) принято говорить «A» *аналитическими функциями.*

Пусть $A(z)$ – некоторая непрерывная функция в области $D \subset \mathbb{C}$. Введем оператор:

$$\partial_A = \partial - \overline{A(z)} \cdot \bar{\partial},$$

где ∂ – оператор дифференцирование по z, а $\bar{\partial}$ – оператор дифференцирование по $\bar{z}$.

Определение 1. *Пусть $f(z)$ – дифференцируемая функция в области D. Если для любого $z \in D$ она удовлетворяет уравнению*

$$\overline{\partial_A} f(z) = 0,$$

то $f(z)$ называется $A(z)$-аналитической функцией в области D, где $\overline{\partial_A} = \bar{\partial} - A(z) \cdot \partial$.

Определение 2. *Если для любого $z \in D$*

$$\partial_A f(z) = 0$$

то $f(z)$ называется $A(z)$-антианалитической функцией в области D.

Отметим, что при $A(z) \equiv 0$ мы получим определение аналитической и антианалитической функции.

Пусть «$A(z)$» – антианалитическая функция, $\partial A = 0$, в области $D \subset \mathbb{C}$ такая, что $|A(z)| \le C < 1,\ \forall z \in D$. Положим

$$D_A=\frac{\partial}{\partial z}-\bar{A}(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}},\quad \bar{D}_A=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}-A(z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда, согласно (3), класс «$A(z)$» аналитических функций $f\in O_A(D)$ характеризуется тем, что $\bar{D}_A f=0.$ Так как антианалитческая функция является бесконечно гладкой, то вытекает, что $O_A(D)\subset C^{\infty}(D).$

Теорема 3 *(Аналог теоремы Коши). Если $f\in O_A(D)\cap C(\bar{D}),$ где $D\subset\mathbb{C}-$область со спрямляемой границей ∂D, то* $\int\limits_{\partial D} f(z)(dz+A(z)d\bar{z})=0.$

Теперь мы предположим, что область $D\subset\mathbb{C}$ – выпукла и $\xi\in D$ – фиксированная ее точка. Рассмотрим функцию

$$K(z,\xi)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z-\xi+\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau}},$$

где $\gamma(\xi,z)$ – гладкая кривая, соединяющая точки $\xi,z\in D.$ Так как функция область D – односвязная и функция $\bar{A}(z)$ – голоморфная, то интеграл $I(z)=\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau$ не зависит от пути интегрирования; он совпадает с первообразной, $I'(z)=\bar{A}(z).$

Теорема 4. $K(z,\xi)$ *является A-аналитической функцией вне точки $z=\xi$, т.е. $K\in O_A(D\setminus\{\xi\}).$ Более того, в точке $z=\xi$ функция $K(z,\xi)$ имеет полюс первого порядка.*

Замечание. Если область $D\subset\mathbb{C}$ не является выпуклой, а лишь односвязной то, хотя функция $\psi(z,\xi)$ однозначно определена в области D, но априори, она может иметь другие изолированные нули кроме $\xi:\ \psi(z,\xi)=0,\ z\in P=\{\xi,\xi_1,\ \xi_2,...\}.$ Следовательно, $\psi\in O_A(D),\ \psi(z,\xi)\neq 0$ при $z\notin P$ и $K(z,\xi)$ является $A(z)$ аналитической функцией только в $D\setminus P,$ причем она имеет полюсы в точках P. В связи с этим ниже мы рассматриваем класс $A(z)$ аналитических функций только в выпуклой области $D\subset\mathbb{C}$.

Функция $\psi(z,\xi)\in O_A(D)$ осуществляет внутреннее отображение. В частности, множество $\left\{z\in D:\ |\psi(z,\xi)|=\left|z-\xi+\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\bar{A}(\tau)d\tau}\right|<r\right\}$ представляет собой открытое множество в D. Для достаточно малых $r>0$ оно компактно принадлежит D и содержит точку ξ. Это множество называется *$A-$лемнискатой, с центром в точке ξ* и обозначается как $L(\xi,r)$. По принципу максимума, лемниската $L(\xi,r)$ является односвязной и по принципу минимума она – связная.

Известно, что $K(z,\xi)\in L^1_{loc}(D),\ \forall\xi\in D$ и дифференциальная форма первой степени $\omega=K(z,\xi)\left(dz+A(z)d\bar{z}\right)$ определяет поток первой степени по формуле

$$\omega\circ\alpha=\int\omega\wedge\alpha,\ \alpha\in F^1(D),$$

где $F^1(D)$ – класс финитных, бесконечно гладких в D дифференциальных форм первой степени.

Теорема 5. *Дифференциал потока* $d\omega$ *совпадает с мерой Дирака* δ_ξ, *т.е. для любой финитной, бесконечно гладкой в* D *функции* $\varphi\in F^0(D)$ *имеет место*

$$d\omega\circ\varphi=\int\omega\wedge d\varphi=\varphi(\xi),\ \alpha\in F^0(D).$$

Теорема 6 *(Аналог формулы Коши). Пусть* $D\subset\mathbb{C}$ *– выпуклая область и* $G\subset D-$*произвольная подобласть, с кусочно гладкой границей* ∂G. *Тогда для любой функции* $f(z)\in O_A(G)\bigcap C(\bar{G})$ *имеет место формула*

$$f(z)=\int\limits_{\partial G}K(\xi,z)f(\xi)\left(d\xi+A(\xi)d\bar{\xi}\right),\ z\in G.$$

Сначала заметим, что аналогом степенных рядов для «$A(z)$» аналитических функций будут ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty}c_j\psi^j(z,a),\ a\in D,\ c_j-\text{константы}.$$

Областью сходимости вышеуказанного ряда будет лемниската $L(a,r)=\left\{\left|\psi(z,a)\right|<r\right\}$, где радиус сходимости r находится по формуле Коши-Адамара:

$$\frac{1}{r}=\overline{\lim_{j\to\infty}}\sqrt[j]{\left|c_j\right|}.$$

Имеет место обратное

Теорема 7. *Если* $f(z)\in O_A\left(L(a,r)\right)\bigcap C\left(\bar{L}(a,r)\right)$, *где* $L(a,r)=\left\{\xi\in D:\ \left|\psi(\xi,a)\right|<r\right\}\subset\subset D-$ *лемниската, то в* $L(a,r)$ *функция* $f(z)$ *разлагается в ряд Тейлора:*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_j\psi^k(z,a),\tag{4}$$

где $c_k=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\partial L(a,\rho)}\dfrac{f(\xi)}{\left[\psi(\xi,a)\right]^{k+1}}\left(d\xi+A(\xi)d\bar{\xi}\right),0<\rho<r,\ k=0,1,\ldots.$

Теорема 8 *(разложение в ряд Лорана). Пусть* $f(z)$ *–* A *аналитична в кольце из лемнискат:* $L(a,R)\setminus L(a,r),\ r<R.$ *Тогда* $f(z)$ *разлагается в этом кольце в ряд Лорана:*

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_j\psi^k(z,a),$$

где коэффициенты Тейлора-Лорана определяются по формуле и сходится равномерно внутри кольца.

Для коэффициентов Тейлора-Лорана справедливы неравенства

$$|c_k|\le\frac{\max\{|f(z)|:\ z\in\partial L(a,\rho)\}}{\rho^k},\ r<\rho<R,\ k=0,\pm1,\pm2,....$$

В случае, когда a – существенно особая точка, имеет место теорема Сходского, что для любого комплексного числа W существует последовательность $z_k\to a:\ f(z_k)\to W.$ Отметим, что по теореме Лиувилля, антиголоморфная во всей плоскости функция $A(z)$, удовлетворяющая условию $|A(z)|\le C<1$ является константой. Поэтому, если мы хотим определить целую $A(z)$ аналитическую функцию $f(z)\in O_A(\mathbb{C}),$ то мы должны потребовать, чтобы $A(z)\equiv C,\ |C|<1.$ Для таких целых функций справедлива теорема Пикара о том, что целая A-аналитическая функция $f\not\equiv const$ принимает значения, кроме двух точек. Для A-антианалитических функций содержательна следующая большая теорема Пикара

Теорема 9. *Если a – существенно особая точка A аналитической функции $f(z)$, то функция $f(z)$ принимает все значения комплексной расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, кроме двух.*

Если для семейства $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}\subset O_A(G)$ любое его подсемейство $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda_0}$, $\Lambda_0\subset\Lambda$ называется нормальным, если содержит равномерно сходящуюся внутри G подпоследовательность $\{f_j(z)\}\subset\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda_0}:\ f_j(z)\Rightarrow f(z),\ j\to\infty$, то семейство функций $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}\subset O_A(G)$ называется нормальным.

Теорема 10 *(Монтель). Локально равномерно ограниченное семейство A-аналитических функций $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}\subset O_A(G)$ образует нормальное семейство.*

Следствие 1. *Если каждая функция семейства A-аналитических функций $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in\Lambda}$ не принимает два значения $a\in\mathbb{C},\ b\in\mathbb{C},\ a\ne b,$ то это семейство нормальное.*

В четвертой главе диссертации под названием **«Соотношения о сферическом среднем для системы пороупругости»** упруго-пористое статическое состояние среды $\Omega\subset R^3$ в отсутствие диссипации энергии с учётом массовых сил можно выразить системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} L\mathbf{U} = -\dfrac{K}{\rho^3\hat{\alpha}+K}\rho\mathbf{f}, \\ \Delta P = F, \end{cases} \tag{5}$$

здесь

$$F = \rho\nabla\cdot\mathbf{f}\ ,\ \tilde{\lambda} = \lambda - \frac{K}{\rho^3\hat{\alpha}+K}K\ ,$$

оператор L определяется по формуле

$$L\mathbf{U} = \mu\Delta\mathbf{U} + (\tilde{\lambda}+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{U}\,.$$

Теорема 11. (*О среднем*). *Пусть* Ω *– произвольная область,* $\mathbf{U}\in C^3(\Omega), P\in C^2(\Omega)$ *– решение системы (5). Тогда для любого шара* $U_R(\mathbf{r})\subseteq\Omega$ *справедливо равенство*

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \frac{3}{16\pi R^2(2-3\nu)}\oint\limits_{\Sigma_R(\vec{r})}\left[(1-4\nu)\mathbf{U}(\mathbf{q}) + 5\frac{\mathbf{p}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{U}(\mathbf{q}))}{R^2}\right]dS_q -$$

$$-\frac{\rho K}{\rho^3\hat{\alpha}+K}\frac{3-2\nu}{32\pi R^3\mu(1-\nu)(2-3\nu)}\int\limits_{U_R(\vec{r})}\left(R^2-p^2\right)\mathbf{f}(\mathbf{q})dV_q - -\frac{\rho K}{\rho^3\hat{\alpha}+K}\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\cdot$$

$$\int\limits_{U_R(\mathbf{r})}\left[(3-4\nu)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{p}\right)\mathbf{f}(\mathbf{q}) + \left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{p^3}\right)\mathbf{p}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{q}))\right]dV_q, \tag{6}$$

$$P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint\limits_{\Sigma_R(\mathbf{r})}P(\mathbf{q})dS_q + \frac{\rho}{4\pi}\int\limits_{U_R(\mathbf{r})}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{p}\right)\nabla\cdot\mathbf{f}(\mathbf{q})dV_q, \tag{7}$$

где $\vec{p} = \vec{q} - \vec{r}$.

Теорема 12 (*Обратная теорема о среднем*). *Пусть* $\Omega\subset R^3$ *– произвольная область,* $\mathbf{U}\in C^3(\Omega), P\in C^2(\Omega)$, $\mathbf{f}\in C^1(\Omega)$ *и для любого шара* $U_R(\mathbf{r})\subseteq\Omega$ *эти функции удовлетворяют соотношениям средних (6), (7). Тогда функции* $\mathbf{U}$ *и* P *являются решениями системы (5).*

Приведем формулу, связывающая тензор напряжений с тензором деформации упруго-пористого тела и порового давления

$$\sigma_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda\delta_{ik}\varepsilon_{mm} - \alpha\delta_{ik}p, \qquad i,k = 1,2,3 \tag{8}$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(U_{i,k} + U_{k,i}\right), i,k = 1,2,3, \qquad \varepsilon_{mm} = \sum_{n=1}^{3}\varepsilon_{nn}$$

где $\delta_{i,k}$ – символ Кронекера, $v_k = \dfrac{\partial v}{\partial x_k}$, $\tilde{\alpha} = 1 - \dfrac{K}{\alpha\rho^2}$.

Решая систему (8) относительно тензора деформаций, получим соотношения, связывающие тензор деформаций с тензором напряжений и порового давления:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ik} - \frac{\delta_{ik}}{3\lambda+2\mu}\left(\frac{\lambda}{2\mu}\sigma_{mm} - \alpha p\right), \qquad i,k = 1,2,3.$$

Относительно порового давления и тензора напряжений возникает система дифференциальных уравнений:

$$\Delta\sigma_{ij} + \beta\sigma_{mm,ij} = \gamma p_{ij}, \qquad i, j = 1,2,3. \tag{9}$$

$$\Delta P = 0\,.$$

Таким образом, поровое давление и тензор напряжений удовлетворяют уравнению Лапласа и системе дифференциальных уравнений второго порядка (9), соответственно. Соотношение теоремы о среднем для системы дифференциальных уравнений в эластичном пористом теле относительно порового давления и вектора смещения. Для гармонической функции $p(x), x \in \Omega$ справедливы соотношения о среднем:

$$p(0) = \frac{\int_{S(0,R)} p d\Omega}{\int_{S(0,R)} 1 d\Omega} = \frac{1}{\omega_3}\int_{S(0,1)} p d\Omega(S)\,. \tag{10}$$

$$\sigma_{ij}(0) = \frac{3}{2\omega_3(5+2\beta)}\left[10(1-\beta)\int_{S(0,1)} \sigma_{ik}\frac{x_k x_l}{R^2} d\Omega - \right.$$

$$\left. -7\beta\delta_{ij}\int_{S(0,1)} \sigma_{ki}\frac{x_k x_l}{R^2} d\Omega + 35\beta\int_{S(0,1)} \sigma_{ki}\frac{x_i x_j x_k x_l}{R^4} d\Omega\right] +$$

$$+\frac{15\alpha(2+5\beta)}{2\omega_3(2+5\beta)}\int_{S(0,1)} p\frac{x_i x_j}{R^2} d\Omega +$$

$$+\frac{15}{2\omega_3 R^5}\left(\alpha + \frac{7\gamma}{3(5+2\beta)}\right)\delta_{ij}\int_{W(0,R)} \eta^2 p dW +$$

$$+\frac{105(\alpha\beta+\gamma)}{3(5+2\beta)R^5}\int_{W(0,R)} p x_i x_j dW - \frac{5\alpha}{2}\delta_{ij} p(0) \tag{11}$$

Теорема 13. *Для системы дифференциальных уравнений относительно тензора напряжений и порового давления верны следующие соотношения о среднем (10), (11).*

Постановка задачи для сосредоточенных сил в полупространстве упруго-пористой среды.

Постановка задачи. Рассмотрим краевую статическую задачу определения смещений и давления для системы упруго-пористой среды в полупространстве $x_3 > 0$ с краевыми условиями

$$\sigma_{13}\big|_{x_3=0} = \sigma_{23}\big|_{x_3=0} = \frac{\rho_l}{\rho} p\big|_{x_3=0} = 0. \tag{12}$$

$$p = (K - \rho\rho_s\alpha)div\mathbf{U} - \rho\rho_s\alpha div\mathbf{V}\,.$$

для системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_s}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i} + \sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{\partial \overline{h}_{ik}}{\partial x_k} = \rho_s f_i, \\ \dfrac{\rho_l}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i} = \rho_l f_i. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $\mathbf{f} = \left(f_1, f_2, f_3 \right)$ – массовая сила.

Вектор смещений упругого пористого тела $\vec{U}$ и поровое давление p удовлетворяют системе уравнений упругости и уравнению Лапласа соответственно (13). Из граничных условий (12) исключим $div\mathbf{V}\big|_{x_3=0}$, используя определения тензора напряжений и порового давления, получим

$$\mu\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{x_3=0} = 0,\ \mu\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2}\right)\Bigg|_{x_3=0} = 0,\ 2\mu\frac{\partial U_3}{\partial x_3} + \tilde{\lambda} div\mathbf{U}\Bigg|_{x_3=0} = 0.$$

Из второго уравнения системы (13), с учётом (12), получим задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta p = \rho div\mathbf{f}, \qquad x_3 > 0, \tag{14}$$

$$p\big|_{x_3=0} = 0. \tag{15}$$

Таким образом, исходная краевая задача пороупругости в случае простых сил $\mathbf{f} = \mathbf{F}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$, где $\mathbf{F}$ – постоянный вектор, $\mathbf{x}^0$ – координата источника) распалась на две независимые задачи: задачу Р.Миндлина и Д.Чена (5), (15) и задачу Дирихле для уравнения Пуассона (14), (15).

Также, для вычисления тензора напряжений σ_{ij} в упругодеформируемой пористой среде, воспользуемся следующими формулами:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \left(1 - \frac{K}{\alpha\rho^2}\right)\delta_{ij}\, p, \quad i, j = x, y, z,$$

Здесь $\tilde{\nu} = \dfrac{\tilde{\lambda}}{2\left(\tilde{\lambda} + \mu\right)}$ – коэффициент типа Пуассона, поровое давление в случае простых сил определяется по формуле

$$p = \rho\left[\frac{\left(F, x - x^0\right)}{\left|x - x^0\right|^3} - \frac{\left(F, x_{\_} - x^0\right)}{\left|x_{\_} - x^0\right|^3}\right], \tag{16}$$

где $x_{\_} = \left(x_1, x_2, -x_3\right)$.

Таким образом, для упругодеформируемого пористого флюидонасыщенного полупространства решение задачи о смещении точек среды при действии сосредоточенных сил можно получить по формулам из с заменой коэффициента Пуассона ν и λ на $\tilde{\nu}$ и $\tilde{\lambda}$, соответственно. Компоненты касательного тензора напряжений вычисляется также, как в с заменой коэффициента Пуассона ν на $\tilde{\nu}$. Компоненты нормального тензора напряжений можно получить также по формулам с изменением коэффициента Пуассона ν на $\tilde{\nu}$ и добавлением (16).

Рассмотрим результат применения численных вычислений на основе полученной формулы при решении задачи Миндлина для пористого полупространства. Приведены численные вычисления нормального напряжения вдоль горизонтальной плоскости и распределения порового давления, а также смещения по вертикали поверхности полу бесконечного пористого тела. Также изучено влияние пористости на напряжение, поровое давление и смещение.

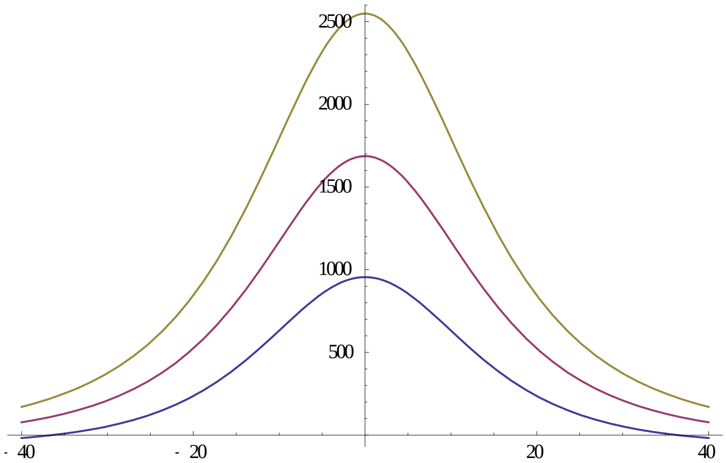


Рисунок 1. Вертикальное смещение поверхности ($c \cdot V_s^2 \cdot w$) при действии граничной нормальной силы вертикал (голубой $m = 20\%$, сиреневый $m = 25\%$, фиолетовый $m = 30\%$)

В пятой главе диссертации, под названием **«Трехмерное вихревое течение в несжимаемой двухскоростной гидродинамике»** получены динамические уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению, в случае постоянства насыщенностей фаз. Описаны течения несжимаемых вязких двухскоростных жидкостей для случая равновесия фаз по давлению с помощью двух скалярных функций. В частности, для полученных системы дифференциальных уравнений получены аналоги двоякопериодического течения Колмогорова. Эти решения могут быть полезны для тестирования при решении численными методами соответствующих дифференциальных уравнений. Получен ряд дифференциальных тождеств, связывающих скорости, давление и массовую силу в уравнениях двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению. Некоторые из этих тождеств имеют дивергентный вид и могут рассматриваться, как некоторые (стационарные) законы сохранения. Обнаружено, что функции тока для плоского движения удовлетворяют системе уравнений Монжа-Ампера. Построено общее решение для одной частной системы уравнений Монжа-Ампера на основе метода обобщенного разделения переменных.

Теорема 14. *Для любого движения идеальной двухскоростной системы с одним давлением* $(\mathbf{v}\neq 0, \tilde{\mathbf{v}}\neq 0)$ *справедливы тождества*

$$div\left[\frac{1}{v^2}\left\{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}div\mathbf{v}+\frac{\nabla p}{\bar{\rho}}-\frac{\tilde{\rho}}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2-\mathbf{f}\right\}\right]=-2\frac{\sin\theta}{v}\left(\mathbf{v}\cdot\left(\nabla\alpha\times\nabla\theta\right)\right)=div\mathbf{S},$$

$$div\left[\frac{1}{\tilde{v}^2}\left\{\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t}+\tilde{\mathbf{v}}div\tilde{\mathbf{v}}+\frac{\nabla p}{\bar{\rho}}-\frac{\rho}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2-\mathbf{f}\right\}\right]=-2\frac{\sin\tilde{\theta}}{\tilde{v}}\left(\tilde{\mathbf{v}}\cdot\left(\nabla\tilde{\alpha}\times\nabla\tilde{\theta}\right)\right)=div\tilde{\mathbf{S}}.$$

Кроме того, помимо общего закона сохранения, справедливого для любых гладких векторных полей $\mathbf{v}(x,y,z,t)$, $\tilde{\mathbf{v}}(x,y,z,t)$, *также выполняются законы сохранения дифференциальных форм*

$$div\left(\mathbf{G}+\mathbf{H}_i\right)=0,\qquad div\left(\tilde{\mathbf{G}}+\tilde{\mathbf{H}}_i\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow div\left[\frac{1}{v^2}\left\{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}div\mathbf{v}+\frac{\nabla p}{\bar{\rho}}-\frac{\tilde{\rho}}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2-\mathbf{f}\right\}+\mathbf{H}_i\right]=0,$$

$$div\left[\frac{1}{\tilde{v}^2}\left\{\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t}+\tilde{\mathbf{v}}div\tilde{\mathbf{v}}+\frac{\nabla p}{\bar{\rho}}-\frac{\rho}{2\bar{\rho}}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2-\mathbf{f}\right\}+\tilde{\mathbf{H}}_i\right]=0$$

и интегральных форм для потоков

$$\iint_S\left(\left[\mathbf{G}+\mathbf{H}_i\right]\cdot\boldsymbol{\eta}\right)dS=0,\qquad \iint_S\left(\left[\tilde{\mathbf{G}}+\tilde{\mathbf{H}}_i\right]\cdot\boldsymbol{\eta}\right)dS=0,\qquad i=1,2.$$

Здесь векторы $\mathbf{H}_i\left(\tilde{\mathbf{H}}_i\right)$ выражаются только через углы $\alpha\left(\tilde{\alpha}\right)$, $\theta\left(\tilde{\theta}\right)$ направлений скоростей $\mathbf{v}(x,y,z,t)$, $\tilde{\mathbf{v}}(x,y,z,t)$, S – кусочно-гладкая граница области D, $\boldsymbol{\eta}$ – нормаль к S.

Уравнения движения двухскоростной среды в обратимом случае с одним давлением в системе в изотермическом случае имеют следующий вид

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}+div\left(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}}+\rho\mathbf{v}\right)=0,\qquad \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+div\left(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}}\right)=0,$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\left(\mathbf{v},\nabla\right)\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\bar{\rho}}+\frac{\tilde{\rho}}{2\rho}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2+\mathbf{f},\tag{17}$$

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial t}+\left(\tilde{\mathbf{v}},\nabla\right)\tilde{\mathbf{v}}=-\frac{\nabla p}{\bar{\rho}}-\frac{\tilde{\rho}}{2\rho}\nabla\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2+\mathbf{f},\tag{18}$$

где $\tilde{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{v}$ – векторы скорости подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями $\tilde{\rho}=\rho_s$ и $\rho=\rho_l$, $\bar{\rho}=\tilde{\rho}+\rho$ – общая плотность континуума; $\mathbf{f}$ – вектор массовой силы, отнесённой к единице массы;

$$p=p\left(\bar{\rho},\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2\right)$$

есть уравнение состояния континуума.

Теорема 15. *Система уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением (17), (18) для плоского движения* $(\mathbf{v}=\mathbf{v}(x,y,t),\ \tilde{\mathbf{v}}=\tilde{\mathbf{v}}(x,y,t),\ v\neq 0,\tilde{v}\neq 0)$ *представима в виде тождества*

$$\mathbf{G} = rot(\alpha(x,y,t)\mathbf{k}),\ \tilde{\mathbf{G}} = rot(\tilde{\alpha}(x,y,t)\mathbf{k}) \Rightarrow div\mathbf{G} = 0,\ div\tilde{\mathbf{G}} = 0,$$
$$rot\mathbf{G} = -(\Delta\alpha)\mathbf{k},\ rot\tilde{\mathbf{G}} = -(\Delta\tilde{\alpha})\mathbf{k} \Rightarrow \Delta\ln v = div\mathbf{Q},\ \Delta\ln\tilde{v} = div\tilde{\mathbf{Q}},$$
$$(\Delta\alpha)\mathbf{k} = -rot\mathbf{Q},\ (\Delta\tilde{\alpha})\mathbf{k} = -rot\tilde{\mathbf{Q}},$$

где поля $\mathbf{G},\mathbf{Q},\tilde{\mathbf{G}},\tilde{\mathbf{Q}}$ *определены следующим образом*

$$\mathbf{Q} \overset{def}{=} \frac{\mathbf{v}div\mathbf{v} + \mathbf{v}\times rot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \nabla\ln|\mathbf{v}| + rot(\alpha\mathbf{k})$$

$$\mathbf{G} \overset{def}{=} \frac{1}{v^2}\left\{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}div\mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\bar{\rho}} - \frac{\tilde{\rho}}{2\bar{\rho}}\nabla(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 - \mathbf{f}\right\} = \mathbf{S} = (\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{G} + \mathbf{H}_i = rot\mathbf{F}_i, \qquad i = 1,2$$

$$\tilde{\mathbf{G}} \overset{def}{=} \frac{1}{v^2}\left\{\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}div\tilde{\mathbf{v}} + \frac{\nabla p}{\bar{\rho}} - \frac{\rho}{2\bar{\rho}}\nabla(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 - \mathbf{f}\right\} = \tilde{\mathbf{S}} = (\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{P}}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{H}}_i = rot\tilde{\mathbf{F}}_i, \qquad i = 1,2.$$

Теорема 16. *Система уравнений Монжа Ампера*

$$u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} = F, \qquad \tilde{u}_{xy}^2 - \tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{yy} = \tilde{F} \tag{19}$$

(в общем случае $F,\tilde{F}$ *– гладкие функции от* $x,y,u,\tilde{u},u_x,\tilde{u}_x,u_y,\tilde{u}_y,u_{xx},\tilde{u}_{xx}$, $u_{xy},\tilde{u}_{xy},u_{yy},\tilde{u}_{yy}$, *параметра* t*) и система уравнений для функции тока плоского движения несжимаемых сред*

$$\begin{aligned} -\left\{u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y\right\} &= (\Delta u)_t + \left(rot\mathbf{f}_1^*\cdot\mathbf{k}\right),\\ -\left\{\tilde{u}_y(\Delta\tilde{u})_x - \tilde{u}_x(\Delta\tilde{u})_y\right\} &= (\Delta\tilde{u})_t + \left(rot\mathbf{f}_2^*\cdot\mathbf{k}\right), \end{aligned} \tag{20}$$

где $\mathbf{f}_1^* = \mathbf{f} - \dfrac{\nabla p}{\bar{\rho}} + \dfrac{\bar{\rho}}{2\bar{\rho}}\nabla w, \qquad \mathbf{f}_2^* = \mathbf{f} - \dfrac{\nabla p}{\bar{\rho}} - \dfrac{\rho}{2\bar{\rho}}\nabla w, \qquad w = (\tilde{u}_x - u_x)^2 + (\tilde{u}_y - u_y)^2$

связаны между собой следующим образом: их левые части выражаются соответственно через дивергенцию и ротор одних и тех же векторных полей $\mathbf{V},\tilde{\mathbf{V}}$ *вида*

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\nabla\left(u_x^2 + u_y^2\right) - \Delta u\nabla u = -\left(u_x^2 + u_y^2\right)rot(\alpha\mathbf{k}) =$$
$$= \left(u_y u_{xy} - u_x u_{yy}\right)\mathbf{i} + \left(u_x u_{xy} - u_y u_{xx}\right)\mathbf{j} = (\nabla u\times\nabla)\nabla u,$$
$$\tilde{\mathbf{V}} = \frac{1}{2}\nabla\left(\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2\right) - \Delta\tilde{u}\nabla\tilde{u} = -\left(\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2\right)rot(\tilde{\alpha}\mathbf{k}) =$$
$$= \left(\tilde{u}_y\tilde{u}_{xy} - \tilde{u}_x\tilde{u}_{yy}\right)\mathbf{i} + \left(\tilde{u}_x\tilde{u}_{xy} - \tilde{u}_y\tilde{u}_{xx}\right)\mathbf{j} = (\nabla\tilde{u}\times\nabla)\nabla\tilde{u},$$

по следующим формулам

$$div\mathbf{V} = 2\left(u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}\right),\ rot\mathbf{V} = \left\{u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y\right\}\mathbf{k},$$
$$div\tilde{\mathbf{V}} = 2\left(\tilde{u}_{xy}^2 - \tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{yy}\right),\ rot\tilde{\mathbf{V}} = \left\{\tilde{u}_y(\Delta\tilde{u})_x - \tilde{u}_x(\Delta\tilde{u})_y\right\}\mathbf{k}.$$

Если функции $\mathbf{v}(x,y,t)=u_y\mathbf{i}-u_x\mathbf{j},\quad \tilde{\mathbf{v}}(x,y,t)=\tilde{u}_y\mathbf{i}-\tilde{u}_x\mathbf{j},\ p(x,y,t)$ в области $\sum:\{(x,y)\in D, t\in(t_1,t_2)\}$ удовлетворяют системе уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением (17), (18) для плоского движения несжимаемых сред, то в области $\sum$ функции тока $u(x,y,t)$, $\tilde{u}(x,y,t)$ удовлетворяют обоим уравнениям (19) и (20) при $F=\dfrac{div\mathbf{f}_1^*}{2},\ \tilde{F}=\dfrac{div\mathbf{f}_2^*}{2}$.

В частности, для однородных сред $\rho=const,\ \tilde{\rho}=const$ и потенциального поля $\mathbf{f}=-\nabla U$, уравнения (19), (20) принимают вид

$$\begin{aligned}&(rot\mathbf{V}\cdot\mathbf{k})=-\left\{u_y(\Delta u)_x-u_x(\Delta u)_y\right\}=(\Delta u)_t\\&(rot\tilde{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{k})=-\left\{\tilde{u}_y(\Delta\tilde{u})_x-\tilde{u}_x(\Delta\tilde{u})_y\right\}=(\Delta\tilde{u})_t\end{aligned}\tag{21}$$

$$\frac{div\mathbf{V}}{2}=u_{xy}^2-u_{xx}u_{yy}=F,\qquad \frac{div\tilde{\mathbf{V}}}{2}=\tilde{u}_{xy}^2-\tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{yy}=\tilde{F}\tag{22}$$

Из этого следует, что функции тока $u(x,y,t),\ \tilde{u}(x,y,t)$, найденные, например, как решение известной системы уравнений (21), при любом фиксированном t дают одновременно решение системы уравнений Монжа–Ампера (22), правую часть которых можно найти из системы уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением (17), (18) при $\mathbf{v}=u_y\mathbf{i}-u_x\mathbf{j},\ \tilde{\mathbf{v}}=\tilde{u}_y\mathbf{i}-\tilde{u}_x\mathbf{j}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе научных результатов, полученных в диссертации приведены следующие выводы:

1. Разработка методов операторного аналога теории аналитических функции «A(z)» комплексного переменного позволяет создать механизмы решения некоторых прикладных задач двухфазных сред.
2. Доказаны теоремы Коши, Монтеля, большая теорема Пикара, также позволяет разработать механизмы разложения в ряды Тейлора и Лорана для классического обобщения аналитических функций «A(z)».
3. Получение интегральных соотношений о среднем, связывающих решения стационарной системы уравнения пороупругости в произвольной внутренней точке шара (круга) со значениями на сфере (окружности) осуществляется разработкой метода обобщения интегральной формулы Пуассона для стационарной системы пороупругости.
4. С помощью алгоритма численного исследования влияния разных характеристик на волновое поле получается решение аналога задачи Миндлина для стационарной системы уравнения пороупругости в полупространстве.
5. Найдены в дивергентном виде дифференциальные тождества, связывающие скорости, давление и массовую силу в уравнениях двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению.
6. Находятся общие решения одного частного случая для функции тока в плоском случае системы уравнений Монжа-Ампера.
7. При постоянстве объемной насыщенности веществ с помощью двух скалярных функций, алгоритм численного моделирования и методы системы дифференциальных уравнений выражают течения несжимаемых вязких двухскоростных жидкостей для случая равновесия фаз по давлению.
8. Корректная математическая классификация динамики многофазных сред процессов проводимости тепла и массы в неглубоких контурах флюидных систем, промышленная транспортировка смесей газов и жидкостей и двух жидкостных смесей предсказывает естественные и технологические процессы. Математические модели двухфазных сред, метод вычисления сложных течений эндогенного и техногенного вида позволяет получить корректные решения.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.01 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, INSTITUTE OF MATHEMATICS

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

JABBOROV NASRIDIN MIRZOODILOVICH

MATHEMATICAL MODELING TWO-PHASE MEDIUMS BASED ON «A» ANALYTIC FUNCTIONS

01.01.01– Mathematical analysis
05.01.07 – Mathematical modelling. Numerical methods and complexes of applications
(Physical and mathematical sciences)

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2017

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number №B2017.1.DSc./FM2.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://fti-kengash.uz/ and an the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Imomnazaro Kholmatzon Khudoynazarovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor, leading researcher (Russia)
Официальные оппоненты:	**Megrabov Aleksandr Grayrovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor (Russia, NSTU)
	Ganikhodjaev Rasul Nabievich doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Khujayorov Bakhtiyor Khujayorovich doctor of physical and mathematical sciences, professor
Ведущая организация:	**Kazakh National Pedagogical University named after Abai**

Defense will take place on "____" __________ 2017 at ____ at the meeting of Scientific council number DSc.27.06.2017.FM.01.01 at National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str. 4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (registered № _____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on "____" __________ 2017.
(mailing report №________ on "____" __________ 2017).

A.S.Sadullaev
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.M.S., academician

G.I. Botirov
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.F.M.S.

M.M.Aripov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic. At the present time, in the world, the improvement of mathematical modeling of applied processes of two-velocity hydrodynamics of compressible two-phase media on the basis of analytical functions "A" of a complex variable, the method of generalization of the integral Poisson formula - integral mean-value relations that connect the solution of the stationary system of elastic porosity equations with values on the sphere and application of them in practice is one of the important tasks.

The aim of the research work is mathematical modeling of applied hydrodynamic processes of compressible two-phase media on the basis of analytic functions "A" of complex variable in two-phase media.

The tasks of research work:

to develop methods for generalizing the theory of an analytic function of a complex variable operator "A (z)", finding algorithms and methods for solving some applied problems for two-phase media;

to develop methods for generalizing the integral Poisson formula for a stationary system of porous elasticity;

to find an algorithm for obtaining the solution of the analogue of the Mindlin problem for a stationary system of the porous elasticity equation in a half-space;

to investigate in a divergent form the differential identities linking velocities, pressures and mass forces in the equations of two-velocity hydrodynamics with equilibrium of the phases with respect to pressure;

to develop an algorithm and methods for obtaining a general solution for the stream function in the planar case of the Monge-Ampère system of equations;

to develop a numerical modeling method for description of the flow of incompressible viscous two-velocity fluids.

The object of the research work is the development of methods for generalizing the Cauchy-Riemann operator for analytic functions "A" of a complex variable and for studying the processes of the classification of the flow of an incompressible viscous two-velocity medium.

Scientific novelty of the research work is as follows:

Methods for generalizing the theory of an analytic function of a complex variable operator "A", algorithms and methods for solving some applied problems for two-phase media;

Cauchy's and Montel's theorems, Picard's large theorem are proved, the mechanisms for expanding Taylor and Laurent series for a classical generalization of analytic functions "A (z)" are developed;

Methods for generalizing the integral Poisson formula for a stationary system of poroelasticity;

An algorithm for obtaining the solution of the analogue of the Mindlin problem for the stationary system of the poroelasticity equation in a half-space and numerical study of the influence of various dynamic characteristics on the wave field is found;

Differential identities connecting velocities, pressures, and mass forces in the equations of two-velocity hydrodynamics with phase equilibrium from pressure are proved in a divergent form;

Methods for constructing a general solution for the stream function in the planar case of the Monge-Ampère system of equations are developed;

A numerical model to study the flow of incompressible viscous two-velocity fluids, taking into account the equilibrium of the phases with respect to pressure is developed.

The outline of the thesis. The dissertation is devoted to mathematical modeling of applied hydrodynamic processes of compressible two-phase media on the basis of analytic functions "A" of complex variable in two-phase media.

In conclusion, the following results are obtained:

- The development of methods of an operator analogue of the theory of analytic functions "A (z)" of a complex variable allows us to create mechanisms for solving some applied problems of two-phase media.
- The Cauchy and Montel theorems, Picard's large theorem are proved and it allows us to develop the mechanisms of expansion in the Taylor and Laurent series for the classical generalization of analytic functions "A (z)".
- Derivation of integral relations about the mean that connect the solutions of the stationary system of the porous elasticity equation to an arbitrary interior point of the sphere (circle) with values on the sphere (circle) is carried out by developing a generalization method for the integral Poisson formula for a stationary system of porous elasticity.
- Using the algorithm for numerical investigation of the influence of various characteristics on the wave field, we obtain a solution of the analog of the Mindlin problem for the stationary system of the porous elasticity equation in a half-space.
- Differential identities linking velocities, pressures, and mass forces in the equations of two-velocity hydrodynamics with phase equilibrium by pressure are obtained in a divergent form.
- There are general solutions of one particular case for the stream function in the planar case of the Monge-Ampère system of equations.
- If the volume saturation of substances is constant with the help of two scalar functions, the algorithm of numerical simulation and the methods of the system of differential equations express the flows of incompressible viscous two-velocity liquids for the case of equilibrium of phases with respect to pressure.
- The correct mathematical classification of the dynamics of multiphase media for the conductivity of heat and mass in shallow contours of fluid systems, the industrial transportation of mixtures of gases and liquids and two liquid mixtures predicts natural and technological processes. Mathematical models of two-phase media, a method for calculating complex flows of endogenous and technogenic species, allows us to obtain correct solutions.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. Монография.Ташкент “Университет” 2012г. 212с.
2. Жабборов Н.М. Пример не квазиконформного отображение удовлетворяюшего модулярному условию куба Уз.мат. журнал. 1994г. № 1. с. 21-28. (01.00.00; №6).
3. Жабборов Н.М. Пример не квазиконформного отображения удовлетворяющего слабому условию квадрата Вестник ТошГУ. 1999г. № 3. с 17-21.(01.00.00; №8).
4. Грачев Е.В., Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Сосредоточенная сила в упруго-пористом полупространстве // Доклады РАН, 2003, т. 391, N0. 3, с. 331–333.(40. ResearchGate. IF=0.22)
5. Grachev E., Zhabborov N.M., Imomnazarov Kh.Kh. A concentrated forece in an elastic porous half-plane //Dokl. Ross. Akad. Nauk.-2003.-vol.391, №3.-P.331-333.(40. ResearchGate. IF=0.22)
6. Grachev E., Zhabborov N.M., Imomnazarov Kh. On one problem for the statics equations of elastic-deformed porous media in A half-planeBull. Nov.Comp. Center, Math. Model. In Geoph., 8(2003), 43-46.(01.00.00; №1).
7. Grachev E., Imomnazarov Kh., Zhabborov N. One nonclassical problem for the statics equations of elastic-deformed porous media in a half-plane // Applied Matematics Letters, Vol. 17, Issue 1, 2004, p.31–34. (40. ResearchGate. IF=1.659)
8. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х., Метод конформных отображений решения динамической задачи для системы уравнений пористых сред // Вестник НУУЗ, серия механика-математика, 2006, No. 2, с. 83–85.(01.00.00; №8).
9. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Тоерема о среднем для неоднородной системы пористоупругости // Journal of Siberian Federal University, Maths&Physics, 2009, 2(4), С. 394–400. (40. ResearchGate. IF=0.3).
10. Imomnazarov Kh.Kh., Zhabborov N.M. Theorem about a spherical mean for a poroelastic static system // Bull. Of the Novosibirsk Computing Center, series: Mathematical Modeling in Geophysics, Novosibirsk, 2010, №13, pp. 45–49.(01.00.00; №1).
11. Imomnazarov Kh.Kh., Zhabborov N.M. Theorem of the mean for inhomogeneous poroelastic static system // Bull. Of the Novosibirsk Computing Center, series: Mathematical Modeling in Geophysics, Novosibirsk, 2011, № 14, pp. 9–16.(01.00.00; №1).
12. ЖабборовН.М., КоробовП.В., ИмомназаровХ.Х. Применение дифференциальных тождеств Меграбова к уравнениям двухскоростной

гидродинамики с одним давлением // Journal of Siberian Federal University, Maths&Physics, 2012, 5(2), С. 156–163. (40. ResearchGate. IF=0.3).

13. Н.М.Жabборов, П.Коробов, И.Имомназаров Применение дифференциальных тождеств Меграбова к уравнениям двухскоростной гидродинамики с одним давлением Вестник УзМУ 2013 №2 50-56с. (01.00.00; №8).

14. Н.М. Жабборов Скалярное описание трехмерных вихревых течений несжимаемой двухскоростной гидродинамики в обратимом приближении. Вестник УзМУ 2013 №2 47-49с.(01.00.00; №8).

15. Kh.Kh.Imomnazarov, P.V.Korobov, N.M. Zhabborov Conservation laws for the two-velocity hydrodynamics with one pressure // Bull. Of the Novosibirsk Computing Center, series: Mathematical Modeling in Geophysics, Novosibirsk, 2013, № 16, pp. 35–44.(01.00.00; №1).

16. Zhabborov N.M., Kh.Kh. Imomnazarov Mean value theorem for a system of differential equations for the stress tensor and pore pressure // Bull. Of the Novosibirsk Computing Center, series: Mathematical Modeling in Geophysics, Novosibirsk, 2013, № 16, pp. 105–112.(01.00.00; №1).

17. Zhabborov N.M., Kh.Kh. Imomnazarov Mean value theorem for a system of differential equations for the stress tensor and pore pressure // Journal of Siberian Federal University, Maths&Physics, 2014, 7(1), С. 132–138 (40. ResearchGate. IF=0.3).

18. Жабборов Н.М.,Отабоев Т.У. Теорема Коши для A(z)-аналитических функций. Уз.мат. журнал. 2014. № 1. с. 15-18.(01.00.00; №6).

19. Н.М.Жабборов, Х.Х.Имомназаров, П.В.Коробов, Трехмерные вихревые течения несжимаемых двухскоростных сред в случае постоянства объемной насыщенности веществ. Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2014.Т.вып. №2 с.15-23.(01.00.00; №15).

20. Kh.Kh.Imomnazarov, P.V.Korobov, N.M. Zhabborov Three-dimensional vortex flows of incompressible two-velocity media at constant saturation of substances // Bull. Of the Novosibirsk Computing Center, series: Mathematical Modeling in Geophysics, Novosibirsk, 14(2014), 17–25.(01.00.00; №1).

21. Imomnazarov Kh.Kh., Korobov P.V., Zhabborov N.M. Three-dimensional vortex flows of two-velocity incompressible media in the case of constant volume saturation // Journal of Mathematical Sciences, New York, 2015, v. 211, No. 6, pp. 760-766.(40. ResearchGate. IF=0,34).

22. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х., Маматкулов М.М. Об одной системе уравнений типа Монжа-Ампера. Вестник НУУз, 2015, №2/1, С.33-37. (01.00.00; №8).

23. A.Sadullaev.,N.M.Jabborov On a Class of A-Analytic Functions// Journal of Siberian Federal University, Maths&Physics, 2016, 9(3), С. 374–383. (40. ResearchGate. IF=0.3).

II бўлим (Часть II; Part II)

24. ЖабборовН.М., ИмомназаровХ.Х., Конформные отображения линейноготипадляантиплоскойдеформации. Педагогик таълим. 2004/3. 27-28.

25. Грачев Е.В., Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Сосредаточенная сила в изотропном упруго-пористом полупространстве Труды международной научной конференции. Ташкент 2003г. 2-том с. 145-148

26. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Тоерема о сферическом среднем для статической системы пористоупругости // Труды межд. конф. «Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач», Самарканд (2007), С. 261–263.

27. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Об одной задаче электрокинетики для пористых сред // Материалы Республиканской научной конфренции « Современные проблемы математики, механики и инфармационных техналогий» Ташкент, 2008, С. 69-71

28. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Тоерема о среднем для неоднородной системы пористоупругости // Труды межд. конфер. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий Аль Хоразми». Т.1, Ташкент, 2009, С. 74–77.

29. Имомназаров Х. Х., Жабборов Н.М. Теорема о среднем для системы дифференциальных уравнений относительно тензора напряжений и порового давления // Труды научной конфер. «Проблемы современной математики». Узбекистан, Карши, 2011, с. 113–115.

30. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Тоерема о сферическом среднем для статической системы пористоупругости // Труды второй межд. Российско-Узбекского симпозиума Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики, Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2012, С. 99–101.

31. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х., Коробов П.В Дифференциальные тождества для уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Труды второй межд. Российско-Узбекского симпозиума Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики, Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2012, С. 102–104.

32. Имомназаров Х.Х., Жабборов Н.М. Дивергентные формўлы для уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Труды респуб. конферен. «Современные проблемы комплексного и функционального анализа». Нукус, 11–12 мая, 2012, с. 65–68.

33. Imomnazarov Kh.Kh., Zhabborov N.M. Relations of the mtan for a poroelastic static system. Тезисы докладов «Актуальные вопросы комплексного анализа».Тошкент. УзМУ. 2013г. 31-32p.

34. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х., Метод конформных отображений решения задачи для системы пороупругости. Тезисы докладов «Актуальные вопросы комплексного анализа».Тошкент. УзМУ. 2013г. 57-58с.

35. Жабборов Н.М.,Отабоев Т.У. Некоторые свойства A(z)-аналитических функций. Тезисы докладов «Актуальные вопросы комплексного анализа».Тошкент. УзМУ. 2013г. 59-60с.

36. Н.М.Жабборов, Х.Х.Имомназаров, М.М.Маматқулов Система уравнений Монжа-Ампера возникающая в двухскоростной гидродинамике. Тезисы докладов "Современные методы математической физики и их приложения" Тошкент. УзМУ. 2015г.

37. Жабборов Н.М.,Отабоев Т.У. Интегральная формула для A(z)-аналитических функций. Тезисы докладов "Современные методы математической физики и их приложения" Тошкент. УзМУ. 2015г.

38. Жабборов Н.М., Carleman formula for one problem arising in static poroelasticity Тезизы докладов республикаской научной конференци с участием зарубежных ученых «Алгебра, анализ и квантовая вероятность» 10-12 сентябрь 2015 г.

39. Имомназаров Х.Х.,Жабборов Н.М., Связь между системами двухскоростной гидродинамики в случайпостоянност во обьемних насышенностей веществ и Монжа Ампера, Тезизы докладов республикаской научной конференци с участием зарубежных ученых «Алгебра, анализ и квантовая вероятность» 10-12 сентябрь 2015 г.

40. Жабборов Н.М.,Отабоев Т.У.,Ахралов Ҳ.З., -лемниската. Материалы республиканской научно-практической конфренции «Статистика и ее приминения-2015» Тошкент. УзМУ. С.289-290

41. Жабборов Н.М.,Отабоев Т.У.,Исмоилов Э.О., Аналог ряда Тейлора для -аналитических функций . Материалы республиканской научно-практической конфренции «Статистика и ее приминения-2015» Тошкент. УзМУ. с. 282-283

42. Жабборов Н.М., Кутлимуратов А.Р., Отабоев Т.У. «Интеграл типа Коши для A(z)-аналитических функций». Материалы республиканской научно-практической конфренции «Актуальные вопросы анализа».Карши ГУ. 2016г. 19-21с.

43. Отабоев Т.У., Жабборов Н.М. «Разложение -аналитической функции в степенной ряд». Материалы республиканской научно-практической конфренции «Актуальные вопросы анализа».Карши ГУ. 2016г. 38-41с.

Автореферат «ЎзМУ хабарлари» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди
(«___»_________ 2017 йил).

Босишга рухсат этилди: _________2017 йил
Бичими 60x45 $^{1}/_{8}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 3,7. Адади: 100. Буюртма: № 313.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.