

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
имени МИРЗО УЛУГБЕКА

На правах рукописи
УДК 517.98

САДАДДИНОВА САНОБАР САБИРОВНА

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ
И
ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА – КАНТОРОВИЧА

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ташкент – 2010

Работа выполнена на кафедре «Алгебра и функциональный анализ»
Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Научный руководитель: доктор физико - математических наук, профессор
Ганиев Иномжон Гуломджанович.

Официальные оппоненты: доктор физико - математических наук, профессор
Абдуллаев Рустамбой Зайирович,

кандидат физико – математических наук Арзикулов Фарход
Нематжанович.

Ведущая организация: Каракалпакский государственный университет.

Защита диссертации состоится «___»_____2011 г. в ____ часов на
заседании специализированного совета Д 067.02.03 при Национальном
Университете Узбекистана по адресу:
700174, Ташкент, Вузгородок, НУУз, механико-математический факультет,
ауд. - 303.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке НУУз.

Автореферат разослан «___»_____2011 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
кандидат физико-математических наук Ю. Х. Эшкабилов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Одним из важных разделов в теории ограниченных линейных операторов является теория однопараметрических полугрупп линейных операторов в банаховых и локально выпуклых пространствах, используемая при решении важных задач теории вероятности, эргодической теории и дифференциальных уравнений. Изучение однопараметрических полугрупп линейных операторов было начато Э. Хилле и К. Иосидой в 40-х годах XX столетия. Аналитическая теория полугрупп операторов, действующих в банаховых и локально выпуклых пространствах, подробно изложена в монографиях Н. Данфорда, Дж. Шварца, К. Иосиды, У. Рудина, Э. Хилле, Р. С. Филлипса и др. С последними достижениями теории однопараметрических полугрупп операторов в банаховых и локально выпуклых пространствах можно ознакомиться в монографии К. Ж. Энгеля и Р. Нагеля.

В последнее время исследованиям различных вопросов теории полугрупп операторов посвящены работы А. С. Загорского, С. В. Ясколко, С. Мюллера, В. А. Золотарева и др.

В 60-годах прошлого века Т.А. Сарымсаковым введено понятие полуполнозначной нормы для линейных операторов, действующих в локально выпуклых пространствах. Используя эти понятия Х. Махмудовым предложен новый метод исследования теории полугрупп линейных операторов в локально выпуклых пространствах.

В 30-х годах XX века в работах Л.В. Канторовича были рассмотрены решеточно-нормированные пространства и введено понятие мажорируемого оператора в этих пространствах. Дальнейшему существенному развитию теории мажорируемых операторов посвящены работы А.Г. Кусраева и др.

В начале 90-х годов прошлого века А.Е. Гутманом впервые была дана аксиоматика измеримых банаховых расслоений с лифтингом. Им же установлено, что всякое пространство Банаха–Канторовича над кольцом измеримых функций можно представить в виде измеримого расслоения банаховых пространств. В исследованиях О.Я. Бендерского и М.В. Подорожного рассмотрена техника теории измеримых расслоений на отрезке $[0, 1]$, .

В работах И. Г. Ганиева, К. К. Кудайбергенова было доказано, что всякий линейный циклически компактный оператор можно представить как измеримое расслоение линейных компактных операторов и получен векторный аналог теоремы Банаха об обратном операторе для операторов, действующих в пространствах Банаха – Канторовича над кольцом измеримых функций. И.Г. Ганиевым и К.К. Кудайбергеновым был получен векторный вариант принципа равномерной ограниченности Банаха – Штейнгауза для операторов в пространствах Банаха – Канторовича.

Полугруппы, порожденные марковскими процессами в

функциональных пространствах, играют важную роль в теории вероятности, экономике, математической биологии, молекулярной физике, квантовой механике и т. д.

Полугруппы, порожденные марковскими процессами в пространствах L_p и пространствах непрерывных функций, эргодические теоремы для таких полугрупп, подробно изучены в монографиях и учебниках И.И. Гихмана и А.В. Скорохода, Е.Б. Дынкина, К. Иосиды, М. Лоэва, В. Феллера и др.

А.И. Жданок в своих работах разработал новый метод исследования марковских операторов, базирующийся на общей теории конечно аддитивных мер. В работе А. Е. Гутмана, А. И. Сотникова исследованы порядковые свойства пространства конечно-аддитивных переходных функций и изучены пространства линейных операторов, порожденные конечно-аддитивными переходными функциями.

Степень изученности проблемы. Г.П. Буцаном изучались полугруппы операторов в гильбертовом пространстве, зависящие от измеримого параметра. Случайные интегральные операторы в идеальных пространствах измеримых функции рассмотрены в работах J. Appell, А.С.Калитвина и П.П. Забрейко. Полугруппы операторов в банаховых и локально выпуклых пространствах достаточно хорошо изучены, но в пространствах Банаха - Канторовича до сих пор не рассматривались.

В связи с развитием общей теории мажорируемых операторов в пространствах Банаха – Канторовича над кольцом измеримых функций, естественно возникают задачи теории полугрупп операторов в этих пространствах, которые разумно решать, используя метод измеримых расслоений.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы «Марковские процессы и полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича» утверждена на Ученом совете механико-математического факультета НУУз 27 августа 2009 года (протокол № 1) и входит в тематику НИР, проводимых на кафедре НУУз «Алгебра и функциональный анализ».

Цель исследования. Целью диссертационной работы является развитие теории полугрупп линейных операторов для пространств Банаха – Канторовича.

Задачи исследования.

- описание полугруппы L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов в пространствах Банаха – Канторовича;
- исследование инфинитезимальных операторов полугрупп L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов, действующих в пространствах Банаха – Канторовича;
- установление связи между свойством сильной непрерывности

полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и свойством

4

сильной непрерывности полугруппы операторов в слоях;

- описание полугрупп операторов, порожденные марковскими процессами в пространствах Банаха – Канторовича []. $E L_p$

Объекты и предмет исследования. Полугруппы L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов в пространствах Банаха–Канторовича и марковские процессы в пространствах Банаха – Канторовича []. $E L_p$

Методы исследований. Применены общие методы измеримых банаховых расслоений, функционального анализа, теории пространств Банаха – Канторовича, марковских процессов.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся: •

представление L_0 -ограниченных полугруппы L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов в пространствах Банаха – Канторовича в виде измеримых расслоений полугрупп операторов в банаховых пространствах;

- представление сильно непрерывных полугрупп операторов в пространствах Банаха – Канторовича;
- представление инфинитезимального производящего оператора при помощи измеримых расслоений полугрупп операторов;
- описание полугрупп операторов, порожденные марковскими процессами в пространствах Банаха – Канторовича []. $E L_p$

Научная новизна.

– получено представление полугруппы L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов в пространстве Банаха – Канторовича в виде измеримых расслоений полугрупп ограниченных операторов;

– исследованы связи между свойствами сильной непрерывности полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и сильной непрерывности полугруппы операторов в слоях;

– доказана () bo –замкнутость инфинитезимального производящего оператора полугруппы L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов в пространствах Банаха – Канторовича;

– получено представление полугрупп операторов, порожденные марковскими процессами в пространствах Банаха – Канторовича []; $E L_p$ – доказаны аналоги статистической и индивидуальной эргодических теорем для полугруппы операторов, порожденной марковским процессом с инвариантной мерой в пространстве Банаха – Канторовича []. $E L_p$

Научная и практическая значимость результатов исследования. Результаты диссертации являются новыми и могут применяться в теории можарируемых операторов в пространствах Банаха – Канторовича, в эргодической теории и их приложениях.

теоретический характер.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на международной конференции «Теория операторов. Комплексный анализ. Математическое моделирование» в городе Волгодонске Ростовской области (2007 г.), на научной конференции, посвященной 90-летию юбилею НУУз (2008 г.), на городском семинаре по функциональному анализу НУУз под руководством профессора В.И. Чилина (2007-2010 гг.), на семинаре «Операторные алгебры и их приложения» Институт Математики и информационных технологий АН РУз под руководством академика Ш.А. Аюпова и на кафедре НУУз «Алгебра и функциональный анализ» (2007-2009 гг.) и на научном семинаре специализированного совета Д 067.02.03 при НУУз под руководством академика А.С.Садуллаева.

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[7] в виде статей и тезисов конференций. В работах [1], [4]-[6] постановка задачи принадлежат И.Г.Ганиеву.

Доказательства всех основных результатов принадлежат диссертанту.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и 47 наименований использованной литературы. Объем диссертации 88 страниц. Нумерация определений, теорем, предложений, лемм и следствий самостоятельная в каждой главе: первая цифра означает номер главы, вторая – номер параграфа, третья – номер соответствующего утверждения. Формулы нумеруются в пределах главы: номер формулы состоит из номера главы и порядкового номера формулы в главе.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан обзор работ, относящихся к теме диссертации, а также приведено краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации состоит из двух параграфов. В первом параграфе приводятся необходимые определения и факты из теории полугрупп ограниченных линейных операторов банаховых пространств и из теории полугрупп, порожденные марковскими процессами в L_p -пространствах. Во втором параграфе приводятся сведения о структуре пространства Банаха –Канторовича над кольцом измеримых функций.

Пусть (Ω, Σ, μ) – измеримое пространство с полной конечной мерой, L_0 – алгебра всех комплексных измеримых функций на (Ω, Σ, μ) (равные почти всюду функции отождествляются).

Рассмотрим векторное пространство U над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

$\cdot : \rightarrow$ называют L_0 -значной

Определение 1.2.4. Отображение $U L_0$ нормой, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

- 1) $x \geq 0$; $0 \leq x \leq x \leq U = \Leftrightarrow = \in 0 0 ()$;
- 2) $\lambda \lambda \lambda x \mid \mid x = \in (\mathbb{C} , x U \in)$;
- 3) $x y x y x y U + \leq + , \in ()$.

Отображение $\cdot$ называют разложимой нормой, если кроме 1), 2), 3) выполнена аксиома разложимости:

4) для любых $x U \in$ и $_{120} e e L , \in$, удовлетворяющих соотношению $_{12} x e e = +$, существуют $_{12} x x U , \in$ такие, что $_{12} x x x = +$ и $_{kk} x e = (1 2) k = , .$ В том случае, когда условие 4) справедливо лишь для дизъюнктивных $_{120} e e L , \in$, норму называют дизъюнктивно разложимой.

Тройку $(U L , \cdot , _0)$ называют решеточно-нормированным пространством над L_0 .

$x U_{\alpha \in \mathbb{C}}$ называют $() bo$ -сходящейся к элементу $x U \in$ и

Сеть $()_A$

пишут $x bo x = - () \lim_{\alpha}$, если сеть $()_A$

$x x^{\alpha}_{\alpha \in}$

$- (o)$ -сходится к нулю в L_0 .

$x_{\alpha \in}$ называют $() bo$ -фундаментальной, если сеть $()_A x x_{\alpha \beta \alpha \beta} - , \in$.

Сеть $()_A$

$() bo$ -сходится к нулю. Говорят, что решеточно-нормированное

пространство $() bo$ -полно, если любая $() bo$ -фундаментальная сеть $()_A$

$x_{\alpha \in}$ в нем $() bo$ -

сходится к некоторому элементу этого пространства.

Определение 1.2.5. Разложимое $() bo$ -полное решеточно нормированное пространство над L_0 называется пространством Банаха–Канторовича над L_0 .

Пусть X – отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторое банахово пространство $(X () , \omega , \cdot , \cdot)_{X () \omega}$ где $X () \{0\} \omega \neq$ для

всех $\omega \in \Omega$. Сечением X называется функция u , определенная почти всюду в Ω и принимающая значение $u X () () \omega \omega \in$ для всех $\omega \in \text{dom}() u$, где $\text{dom}() u$ есть область определения u .

Пусть L – некоторое множество сечений.

Определение 1.2.6. Пара $(\cdot) \times L$, называется измеримым банаховым расслоением над Ω , если

1) $\sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda_{i+1} \dots \lambda_n \in L$ для всех $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{C}$ и $\sum_{i=1}^n \lambda_i \in L$, где

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i \in \cap \rightarrow + \text{dom}(\cdot) \text{dom}(\cdot) (\cdot)$$

$$(\cdot); \cdot \in \rightarrow \omega \omega \text{ измерима при всех } \sum_{i=1}^n \lambda_i \in ;$$

2) функция $\text{dom}(\cdot) (\cdot)_X$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$$

3) для каждой точки $\omega \in \Omega$ множество $\{(\cdot) \text{dom}(\cdot)\} \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i : \cdot \in , \in$ плотно в $X(\cdot) \cdot \omega$

Вместо $(\cdot) \times L$, будем писать просто X .

7

Сечение s называется ступенчатым, $(\cdot) (\cdot) (\cdot) \wedge i$

если

$$s = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \omega_i, \text{ где } \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} = 1$$

$\chi_{A_i} \in L, A_i \in \Sigma, \chi_{A_i} = 1$ на A_i , $\chi_{A_i} = 0$ на A_i^c . Сечение u

называется измеримым, если для каждого $A \in \Sigma, \chi_A \in L$ найдется такая последовательность $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ступенчатых сечений, что $s_n \rightarrow u$ для почти всех $\omega \in A$.

s, u

$$\|u\|_X = \left(\int \omega^2 \right)^{1/2}$$

Пусть $M(X, \Omega)$ – множество всех измеримых сечений. Символом $L(X, \Omega)$

Ω , обозначим факторизацию $M(X, \Omega)$, по отношению равенства почти всюду. Через $u^\wedge$ обозначим класс из $L(X, \Omega)$, содержащий u . Измеримое сечение $u \in M(X, \Omega)$. Далее, для каждого элемента $u \in L(X, \Omega)$

$$\|u\|_X = \left(\int \omega^2 \right)^{1/2}$$

вводится векторная норма $\|\cdot\|_X$

$(L(X, \Omega), \|\cdot\|_X)$ является

$$\|u\|_X = \left(\int \omega^2 \right)^{1/2}$$

пространством Банаха – Канторовича над L_0 .

Пусть $(\cdot)^\infty L \Omega$ – множество всех комплексных существенно ограниченных измеримых функций на $(\cdot) \Omega, \Sigma, \mathcal{A}$. $L(\cdot)^\infty \Omega$ – факторизация $(\cdot)^\infty L \Omega$ по отношению равенства почти всюду. Обозначим ${}^\infty L \Omega, =_{X(\cdot)} \{(\cdot) \parallel (\cdot) \parallel (\cdot)\}$. и

$$M X u \omega_\omega^\infty \in \Omega, : \in \Omega L$$

$$(\cdot) X$$

${}^\infty L \Omega$, называются существенно ограниченными измеримыми Элементами $(\cdot) X$

сечениями расслоения X . Через $L X (\cdot)^\infty \Omega$, обозначается множество, состоящее из классов эквивалентности существенно ограниченных измеримых сечений. Известно, что $L X (\cdot)^\infty \Omega$, пространство Банаха – Канторовича над $L(\cdot)^\infty \Omega$.

Пусть X – измеримое банахово расслоение над Ω . Рассмотрим произвольный числовой лифтинг $p L(\cdot) (\cdot)^\infty : \Omega \rightarrow \Omega L$.

Определение 1.2.7. Отображение $(\cdot) (\cdot) \rho_X L X X^\infty : \Omega, \rightarrow \Omega, L$ называется векторнозначным лифтингом, ассоциированным с числовым лифтингом p , если выполняются следующие условия:

- а) для всех $u L X (\cdot)^\infty \square \square$ $\in$ и $\text{dom}((\cdot)); \rho_X u^\wedge =$
 б) $(\cdot) \rho \omega \omega$ $\Omega^\wedge \in \Omega$, и $\omega \in \Omega$;

$$\begin{aligned} & (\cdot)(\cdot)_X (\cdot) \\ & = \square \square \square \square \text{ для всех } u L X \end{aligned}$$

$$u p u$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} X \\ (\cdot) \\ \omega \end{matrix} \wedge \wedge \wedge \wedge \\ & {}^\wedge \in \Omega, \text{ то } (\cdot) (\cdot) (\cdot); {}_{X X X} \rho \rho \rho u v u v \end{aligned}$$

- в) Если $u v L X, (\cdot),$ $\wedge \wedge$
 $+ = +$

- г) Если $u L X (\cdot)$ $=$;

8

$$\wedge \wedge \in \Omega, \text{ плотно в } X(\cdot) \omega \text{ для всех } \omega \in \Omega.$$

- д) Множество $\{\rho \omega (\cdot)(\cdot) : (\cdot) u L X\}$

Пусть X – измеримое банахово расслоение над Ω .

Оператор ${}_0 T L L : (\cdot, \cdot) (\cdot, \cdot) \Omega X \rightarrow \Omega X$ называется L_0 -линейным, если

$$\lambda_1 (T x + \lambda_2 x) = T x + \lambda_2 T x \quad \text{для всех } x \in X$$

линейный оператор $T: X \rightarrow X$ называется L_0 -ограниченным, если существует такой $C \in \mathbb{R}_0$, что $\|T x\| \leq C \|x\|$ при всех $x \in X$. Для

L_0 -ограниченного L_0 -линейного оператора T L_0 -значная норма задается по правилу $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T x\|$ и относительно такой нормы пространство всех L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов является пространством Банаха – Канторовича.

Во второй главе диссертации изучаются полугруппы L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов и доказывается вариант классической теоремы о полугруппах в пространстве Банаха – Канторовича.

В первом параграфе второй главы изучаются полугруппы операторов и доказывается, что L_0 -ограниченная полугруппа L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов в пространстве Банаха – Канторовича разлагается измеримое расслоение полугрупп ограниченных операторов.

Пусть $\{T_t\}_{t \geq 0}$ семейство L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов, $t \in [0; +\infty)$.

Определение 2.1.1. Семейство $\{T_t\}_{t \geq 0}$

$T_t \in L(X, X)$ назовем полугруппой

операторов в пространстве Банаха – Канторовича X , если выполняются $T_0 = I$ и $T_{t+s} = T_t T_s$ при всех $t, s \in [0; +\infty)$ где I – тождественный оператор в X .

Если существует $C \in \mathbb{R}_0$, такое, что $\|T_t\| \leq C$ при всех $t \in [0; +\infty)$, то полугруппу назовем L_0 -ограниченной полугруппой.

Соответственно, если существует $C \in \mathbb{R}_0$ такое, что $\|T_t\| \leq C$ при всех $t \in [0; +\infty)$, то полугруппу назовем L_0 -ограниченной полугруппой. Пусть $\{T_t\}_{t \geq 0}$ полугруппа ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве X для любого $\omega \in \Omega$, $t \in [0; +\infty)$.

Определение 2.1.2. Семейство $\{T_t\}_{t \geq 0}$

$T_t \in L(X, X)$ назовем измеримым

расслоением полугрупп операторов, если для каждого $t \in [0; +\infty)$ имеет место $\{T_t\}_{t \geq 0}$ при всех $x \in X$.

Если $\{ \}_{[0; \infty)}$

$T \omega_{\infty} -$ измеримое расслоение ограниченных линейных $(\cdot)_t^t$

9

операторов, то линейный оператор $T_0 : (\cdot, \cdot) \rightarrow (\cdot, \cdot)$, $T L L_t \Omega X \rightarrow \Omega X$ определенный равенством $(\cdot) (\cdot), T x T x_{tt} = \omega \omega$ служит L_0 -ограниченным L_0 -линейным оператором.

Основным результатом первого параграфа второй главы является следующая теорема.

Теорема 2.1.2. Если $\{ T_0 \}_{[0; \infty)} T L L_{\infty}$

$:(\cdot, \cdot) (\cdot, \cdot)_t^t$
 $\Omega X \rightarrow \Omega X - L_0$ -

ограниченная полугруппа L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов, то существует измеримое расслоение ограниченных полугрупп линейных операторов $(\cdot) : (\cdot) (\cdot) T_t \omega \omega \omega X \rightarrow X$ такое, что $(\cdot) (\cdot) (\cdot) (\cdot) \rho \omega \omega \rho \omega_{xx}$ $T x T x_{tt} =$ для всех $x L(\cdot, \cdot)^{\infty} \in \Omega X$ и $\omega \in \Omega$.

Во втором параграфе второй главы определяются сильно непрерывные полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и исследуются связи между свойствами сильной непрерывности полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и сильной непрерывности полугруппы операторов в слоях.

Определение 2.2.1. Полугруппу L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов $\{ \}_{[0; \infty)}$

$T_{\infty} \text{ в } L(\cdot, \cdot) \Omega X$ назовем сильно непрерывной, если t_t

$T x x_t - (\cdot) 0$ -сходится к нулю в L_0 при $t \rightarrow 0$ для каждого 0
 $x L \in \Omega X(\cdot, \cdot)$.

Следующая теорема является основным результатом второго параграфа второй главы:

$T_{\infty} - L(\cdot)^{\infty} \Omega$ -ограниченная полугруппа операторов.

Пусть $\{ \}_{[0; \infty)}$
 t_t

Теорема 2.2.1. Если измеримое расслоение полугруппы $T \omega_{\infty}$ сильно непрерывно в $X(\cdot) \omega$ для почти всех $\omega \in \Omega$, то $\{ \}_{[0; \infty)}$

$(\cdot)^t$

T_{∞} сильно непрерывная полугруппа операторов в $L(\cdot, \cdot) \Omega X$
 $\{ \cdot \}_{[0; \cdot)}$

В третьем параграфе второй главы изучаются измеримые расслоения замкнутых операторов.

Пусть ${}_{00} A L L : (\cdot, \cdot) (\cdot, \cdot) \Omega X \rightarrow \Omega X$ – L_0 -линейный оператор, с областью определения ${}_0 D(\cdot) (\cdot, \cdot) A L X \subset \Omega$ и пусть $A(\cdot) \omega$ – линейный замкнутый оператор из $X(\cdot) \omega$ в $X(\cdot) \omega$ с областью определения $D((\cdot)) A$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Определение 2.3.2. Семейство $\{A(\cdot), \omega \mid \omega \in \Omega\}$ назовем измеримым расслоением замкнутых операторов, если $A x M(\cdot) (\cdot) (\cdot, \cdot) \omega \mid \omega \in \Omega X$ для любого $x M x D A \in \Omega X \in (\cdot, \cdot), (\cdot) ((\cdot))$. $\omega \omega$

Если $\{A(\cdot), \omega \mid \omega \in \Omega\}$ – измеримые расслоения замкнутых операторов, то линейный оператор определенный равенством $A x A x (\cdot) (\cdot), \omega \omega$
 $\wedge = (1)$

10

является L_0 -линейным оператором из ${}_0 L(\cdot, \cdot) \Omega X$ в ${}_0 L(\cdot, \cdot) \Omega X$ с областью определения

$$D(\cdot) A = \left\{ x L X x A(\cdot, \cdot) : (\cdot) ((\cdot)) \cdot \omega \mid \omega \in \Omega \text{ для почти всех } \omega \right\} \quad \text{Теорема}$$

2.3.2. Если $\{A(\cdot), \omega \mid \omega \in \Omega\}$ – измеримые расслоения замкнутых операторов, то L_0 -линейный оператор ${}_{00} A L L : (\cdot, \cdot) (\cdot, \cdot) \Omega X \rightarrow \Omega X$ определенный равенством (1), является $(\cdot) bo$ -замкнутым оператором. В

четвертом параграфе второй главы изучается инфинитезимальный производящий оператор полугрупп операторов в пространствах Банаха – Канторовича и доказывается $(\cdot) bo$ -замкнутость такого оператора. Пусть ${}_{00} : (\cdot, \cdot) (\cdot, \cdot) T L L_t \Omega X \rightarrow \Omega X$ – L_0 -ограниченная полугруппа L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов, $(\cdot) : (\cdot) (\cdot) T_t \omega \mid \omega \in \Omega X \rightarrow X$ соответствующее измеримое расслоение полугрупп операторов и $T \omega_{\infty}$ – сильно непрерывно для почти всех $\omega \in \Omega$ и $A(\cdot) \omega$ –
 $\{ \cdot \}_{[0; \cdot)}$

$$(\cdot)^t_t$$

инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{T_\omega\}_{[0;+\infty)}$ для

$$(\cdot)^t_t$$

почти всех $\omega \in \Omega$.

Определим линейный оператор ${}_0A A L X : (\cdot) (\cdot, \cdot) D \rightarrow \Omega$ равенством (1). Определение 2.4.1. Если $\{A(\cdot), \omega \mid \omega \in \Omega\}$ – измеримые расслоения замкнутых операторов, то L_0 -линейный оператор A , определенный равенством (1), назовем инфинитезимальным производящим оператором L_0 -ограниченной полугруппы $\{T_\omega\}_{[0;+\infty)}$.

$$T_{\infty+\infty}^t_t$$

Следующий результат является основным результатом второй главы:

Теорема 2.4.1. Пусть $\{T_\omega\}_{[0;+\infty)}$

$T_{\infty+\infty}$ - L_0 -ограниченная полугруппа $\{T_\omega\}_{[0;+\infty)}$

операторов, причем соответствующее измеримое расслоение полугрупп $T_\omega \in T_{\infty+\infty}$ сильно непрерывна для почти всех $\omega \in \Omega$. Тогда

$$\{T_\omega\}_{[0;+\infty)}$$

$$(\cdot)^t_t$$

1) A является $(\cdot)bo$ - плотно определенным и $(\cdot)bo$ -замкнутым

оператором; $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ где $(\cdot)^1$

$${}^tA T x bo e x_t$$

$$(\cdot) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (T_\omega - I) x = -Ax$$

$$2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (T_\omega - I) x = -Ax$$

$$A T I;$$

$$x L \in \Omega X (\cdot, \cdot) \text{ вектор-функция } t$$

3) для любого x_0 $t T x \rightarrow$ удовлетворяет

$$d T_x A T x T A x dt =$$

дифференциальному уравнению .

$$t$$

$$t t$$

В третьей главе диссертации описываются полугруппы операторов, порожденные марковскими процессами в пространствах Банаха –

Канторовича $E F[]$ и доказываются аналоги статистической и индивидуальной эргодических теорем для таких полугрупп.

11

В первом параграфе третьей главы рассматриваются полугруппы операторов, порожденные марковскими процессами в пространствах Банаха – Канторовича $[] E L_p$.

Пусть E – идеальное пространство измеримых функций на (Ω, Σ, μ) , $\Omega \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ $(S, \mathcal{S})$ B_m – пространство с мерой m , $(S, \mathcal{S}) L_m B$ – банахово пространство всех измеримых по Лебегу функций на $(S, \mathcal{S})$. B_m Обозначим символом $[] E L_p$ – пространство всех измеримых функций K на $\Omega \times S$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

а) класс эквивалентности функции $x K x \square (\cdot, \cdot) \omega$ входит в $(\cdot, \cdot) L S m_p$ для почти всех $\omega \in \Omega$;

$\omega \omega \square K \cdot$ измерима и ее класс эквивалентности K

б) функция $(\cdot, \cdot)_{L_p}$ входит в E .

Тогда $(E L[], p \cdot)$ – пространство Банаха – Канторовича над E и является идеальным пространством измеримых функций на $\Omega \times S$. Основным результатом первого параграфа третьей главы является следующая теорема.

Теорема 3.1.1. Пусть $P_t x B(\cdot, \cdot)$ – марковский процесс с инвариантной мерой $m_t, 0. >$ Тогда

$$T K x K y P_t x dy \omega \omega = \int_S (\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot, \cdot)_t$$

определяет L_0 -ограниченный L_0 -линейный положительный оператор в $[]_0 L_p$ такой, что $T T T_{t+s} =$ при этом $T_t 1 = 1$ и $T K K_t \leq$ при всех $t \in +\infty (0;)$.

Во втором параграфе третьей главы доказывается статистическая эргодическая теорема для полугрупп операторов, порожденных марковским процессом с инвариантной мерой, в пространствах Банаха – Канторовича $[] E L_p$. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.2.2. Для любой функции $[]$, $1, K E L p \in \geq_p$ существует предел

$$1^n$$

$$- = \sum_{*}$$

() $\lim$

$bo T K K$
 k

n

n_k

$\rightarrow \infty =$
 1

$**$

в [], $E L^p$ при этом $T K K$.

$=$

В третьем параграфе третьей главы доказывается индивидуальная эргодическая теорема для полугрупп операторов, порожденных марковским процессом с инвариантной мерой, в пространствах Банаха – Канторовича

12

[]. $E L_p$ Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 3.3.2. Для любой функции $o[] K L L \in_p$ последовательность 1^n

$\sum () O$ – сходится к K_{*} в $o[] L L_p$ для любого $p > 1$.

$n = k$

благодарность своему научному

k
 1

Пользуясь случаем, автор выражает руководителю профессору Иномжану Гуломджановичу Ганиеву за помощь при работе над диссертацией и профессору Владимиру Ивановичу Чилину за советы и полезные обсуждения результатов работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена развитию теории полугрупп линейных операторов для пространств Банаха – Канторовича. Получены следующие результаты:

Доказано, что L_0 -ограниченная полугруппа L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов в пространстве Банаха – Канторовича разлагается в измеримое расслоение полугрупп ограниченных операторов;

Исследованы связи между свойствами сильной непрерывности полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и сильной непрерывности полугруппы операторов в слоях;

Доказана () bo –замкнутость инфинитезимального производящего

оператора полугруппы L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов в пространствах Банаха – Канторовича;

Дано представление полугруппы в пространствах Банаха – Канторовича с помощью инфинитезимального производящего оператора. Получены представления полугрупп операторов, порожденные марковскими процессами в пространствах Банаха – Канторовича []; $E L_p$ Доказаны аналоги статистической и индивидуальной эргодических теорем для полугрупп операторов, порожденной марковским процессом с инвариантной мерой в пространстве Банаха – Канторовича []. $E L_p$ Все результаты являются новыми.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Ганиев И.Г., Сададдинова С.С. Сильно и равномерно непрерывные полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича// Исследования по современному анализу и математическому моделированию. –Владикавказ, 2008. – С. 175-185.
2. Сададдинова С.С. Измеримые расслоения замкнутых операторов // Современные проблемы математики, механики и информационных технологий. Материалы Республиканской научной конференции. – Ташкент, 2008. – С. 241–243.
3. Сададдинова С.С. Инфинитезимальный производящий оператор полугрупп операторов в пространствах Банаха-Канторовича // Вестник НУУз. – Ташкент, 2009. – № 1. – С. 63-67.
4. Ганиев И.Г., Сададдинова С.С. Полугруппа операторов в пространствах Банаха-Канторовича// Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 2009. – № 2. – С. 42-48.
5. Ганиев И.Г., Сададдинова С.С. Индивидуальная эргодическая теорема для полугрупп операторов в пространствах Банаха – Канторовича [] $E L_p$ // Дифференциальные уравнения и их приложения. Материалы Республиканской научной конференции. – Нукус, 2009. – С. 78-82.
6. Ганиев И.Г., Сададдинова С.С. Марковские процессы и полугруппы в пространствах Банаха – Канторовича [] $E L_p$ // – Киев, Украинский

математический конгресс. <http://imath.kiev.ua/~congress> 2009/Abstracts.

7. Сададдинова С.С. Об одной полугруппе операторов в пространствах измеримых по Бохнеру функций // Вестник НУУз. – Ташкент, 2010. – № 3. – С. 169-172.

14

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор

Сададдинова Санобар Сабиловнанинг

01.01.01 – математик анализ ихтисослиги бўйича

«Марков жараёнлари ва Банах - Канторович фазоларидаги операторлар ярим группалари» мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: вектор қийматли лифтинг, Банах – Канторович фазоси, ўлчовли банах тахламалари, операторлар ярим группалари, ҳосилавий оператор, Марков жараёнлари.

Тадқиқот объектлари: Банах – Канторович фазоларида операторлар ярим группалари ва $[] E L_p$ Банах – Канторович фазоларида Марков жараёнлари.

Ишнинг мақсади: Операторлар ярим группалари назариясини Банах – Канторович фазолари учун умумлаштириш.

Тадқиқот методлари: ўлчовли банах тахламалари, функционал анализ, Банах – Канторович фазолари ва марков жараёнлари назариялари методлари.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: Олинган натижалар янги ва қуйидагилардан иборат:

- Банах – Канторович фазоларида L_0 -чегараланган L_0 -чизиқли

операторлар ярим группаларининг чегараланган операторлар ярим группалари ўлчовли тахламалари кўринишидаги тасвири;

- Банах – Канторович фазоларида операторлар ярим группаларининг кучли узлуксизлиги билан қатламлардаги операторлар ярим группаларининг кучли узлуксизлиги хоссалари орасидаги боғланиш;

- Банах – Канторович фазоларида L_0 -чегараланган L_0 -чизиқли операторлар ярим группалари ҳосилавий операторининг операторлар ярим группалари ўлчовли тахламалари кўринишидаги тасвири;

- $[] E L_p$ Банах – Канторович фазоларида Марков жараёнлари вужудга келтирадиган операторлар ярим группалари тасвири ва шундай ярим группалар учун статистик ва индивидуал эргодик теоремалар вариантлари.

Амалий аҳамияти: диссертация натижалари назарий характерга эга. Тадбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: Ишда келтирилган натижалар ва методлар функционал анализнинг Банах – Канторович фазоларида операторлар назарияси ва эргодик назария ҳамда унинг тадбиқларидан махсус курслар ўқишда қўлланилиши мумкин. Фойдаланиш соҳаси: Банах – Канторович фазолари назарияси, эргодик назария ва унинг амалий тадбиқлари.

15

РЕЗЮМЕ

Диссертации Сададдиновой Санобар Сабировны на тему:
«Марковские процессы и полугруппы операторов в пространствах
Банаха – Канторовича»

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – математический анализ

Ключевые слова: векторнозначный лифтинг, пространство Банаха – Канторовича, измеримое банахово расслоение, полугруппы операторов, инфинитезимальный оператор, марковские процессы.

Объекты исследования: полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и марковские процессы в пространствах Банаха – Канторовича $[] E L_p$

Цель работы: Целью диссертационной работы является развитие теории полугрупп операторов для пространств Банаха – Канторовича.

Методы исследования: Применены общие методы измеримых банаховых расслоений, функционального анализа, теории пространств Банаха-Канторовича, марковских процессов.

Полученные результаты и их новизна: Все полученные результаты являются новыми и состоит из следующих:

- получено представление полугруппы L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов в пространстве Банаха – Канторовича в виде измеримых расслоений полугрупп ограниченных операторов;
- исследованы связи между свойствами сильной непрерывности полугруппы операторов в пространствах Банаха – Канторовича и сильной непрерывности полугруппы операторов в слоях;
- представление инфинитезимального производящего оператора полугруппы L_0 -ограниченных L_0 -линейных операторов при помощи измеримых расслоений полугрупп операторов;
- получено представление полугрупп операторов, порожденные марковскими процессами и доказаны аналоги статистической и индивидуальной эргодических теорем для таких полугрупп в пространствах Банаха – Канторовича []. $E L_p$

Практическая значимость: работа носит теоретический характер.
Степень внедрения и экономическая эффективность: Результаты и методы диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов по функциональному анализу и теории мажорируемых операторов в пространствах Банаха – Канторовича, в эргодической теории и их приложениях.

Область применения: Теория пространств Банаха – Канторовича, эргодическая теория и их приложения.

16

RESUME

Thesis of **Sadaddinova Sanobar Sabirovna**
 on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in physics and
 mathematics on speciality 01.01.01 –mathematical analysis,
 subject:
**«Markov processes and semigroup operators in Banach – Kantorovich
 spaces»**

Key words: vector valued lifting, Banach – Kantorovich space, measurable Banach bundles, semigroup operators, Markov processes.

Subject of the inquiry: semigroup operators in Banach – Kantorovich spaces and Markov processes in Banach – Kantorovich spaces $E[L_p]$. **Aim of the inquiry:** The aim of the thesis is generalization of the theory of semigroup operators for Banach – Kantorovich spaces.

Methods of inquiry: In the work methods of measurable Banach bundles, of functional analysis, of the theory of Banach – Kantorovich spaces, of Markov processes are used.

The results obtained and their novelty: All obtained results of the thesis are new and consist of the following:

- representation of the L_0 -bounded semigroup of L_0 -bounded L_0 -linear operators in Banach – Kantorovich spaces in the form of a measurable bundle of semigroups of bounded operators;

- representation of strongly continuous semigroups of operators in Banach – Kantorovich spaces with of strongly continuous semigroups of operators of bundles is described;

- representation of infinitesimal operators of the semigroup of L_0 -bounded L_0 -linear operators with the help of measurable bundle of semigroups of operator is given;

- description of the semigroup operators appeared in the result of Markov processes in Banach – Kantorovich spaces $E[L_p]$ and the variants of the static and individual ergodic theorem for all.

Practical value: The work has a theoretical character.

Degree of embed and economic effectivity: The results and methods introduced in the work can be used in special courses on functional analysis, of the theory of Banach – Kantorovich spaces and the of ergodic theory. **Field of application:** The theory of Banach – Kantorovich spaces, the ergodic theory.