МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА имени МИРЗО УЛУГБЕКА

На правах рукописи
УДК 517.98

НУРЖАНОВ Бердах Орынбаевич

ЛОКАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА АЛГЕБРАХ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ташкент – 2012

Работа выполнена в отделе «Алгебра и анализ» Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Республики Узбекистан **Аюпов Шавкат Абдуллаевич**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Абдуллаев Рустам Заирович**
	кандидат физико-математических наук, **Бер Алексей Феликсович**
Ведущая организация:	Самаркандский государственный университет имени А. Навои

Защита состоится «____» _____________ 2012 года в ____ часов на заседании объединенного специализированного совета Д. 067.02.03 при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека по адресу: 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, Национальный университет Узбекистана, механико-математический факультет, ауд. _____.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат разослан «___» _______________ 2012 г.

Ученый секретарь
специализированного совета Д. 067.02.03,
доктор физико-математических наук Тухтасинов М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Теория дифференцирований на ограниченных операторных алгебрах является важной и хорошо изученной частью общей теории операторных алгебр.

Изучение дифференцирований операторных алгебр начинается с работы И. Капланского, установившего, что всякое дифференцирование AW^*-алгебры типа I является внутренним. В этой же работе И. Капланский сформулировал проблему о том, всякое ли дифференцирование алгебры фон Неймана является внутренним. Эта проблема была решена в работах С. Сакаи. Дифференцирования на C^*-алгебрах и алгебрах фон Неймана исследованы в известных монографиях С. Сакаи. Всестороннее рассмотрение дифференцирований в общих банаховых алгебрах дано в монографии Г. Дейлса, в которой детально изучены условия, гарантирующие автоматическую непрерывность дифференцирований на различных банаховых алгебрах.

Пусть A – некоторая алгебра. Линейный оператор $D: A \to A$ называется *дифференцированием*, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ при всех $x, y \in A$ (правило Лейбница). Каждый элемент $a \in A$ определяет дифференцирование D_a на алгебре A по правилу $D_a(x) = ax - xa$, $x \in A$. Дифференцирования вида D_a называются *внутренними*. Если элемент a, порождающий дифференцирование D_a, принадлежит более широкой алгебре B, содержащей A, то D_a называется *пространственным дифференцированием*.

Одной из главных проблем в теории дифференцирований является доказательство внутренности или пространственности дифференцирований, или же существования не внутренних дифференцирований (в частности, нетривиальных дифференцирований на коммутативных алгебрах).

Развитие некоммутативной теории интегрирования было начато И. Сигалом, который рассмотрел новые классы (не обязательно банаховых) алгебр неограниченных операторов, в частности, алгебру $S(M)$ всех измеримых операторов относительно алгебры фон Неймана M. В 2000 году Ш.А. Аюпов выдвинул программу исследования дифференцирований на алгебрах неограниченных операторов и, в частности, на алгебрах сигаловского типа, т.е. на различных алгебрах измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана.

Следуя программе Ш.А. Аюпова, были решены проблемы описания дифференцирований для различных классов алгебр. В работе А.Ф. Бера, В.И. Чилина, Ф.А. Сукочева были получены необходимые и достаточные условия существования нетривиальных дифференцирований в регулярных коммутативных алгебрах. А.Г. Кусраев методами булевозначного анализа получил необходимые и достаточные условия существования нетривиальных дифференцирований и автоморфизмов в расширенных f-алгебрах. В работах С. Альбеверио, Ш.А. Аюпова и К.К. Кудайбергенова были получены описания дифференцирований алгебры $LS(M)$ – всех локально измеримых операторов, алгебры $S(M)$ – всех измеримых операторов, алгебры $S(M,\tau)$ – всех τ-измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана типа I, а также для некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с алгеброй фон Неймана, и точным нормальным полуконечным следом. Другой подход к подобным проблемам для AW^*-алгебр типа I был предложен в работе А.Е. Гутмана, А.Г. Кусраева и С.С. Кутателадзе, а в работе А.Ф. Бера, Б. де Пагтера и Ф.А. Сукочева – с помощью представлений алгебры измеримых операторов в виде алгебры операторнозначных функций были изучены дифференцирования на них.

В то же время актуальной является задача изучения различных классов линейных операторов типа дифференцирования.

Одним из важных таких классов являются локальные дифференцирования, впервые введенные в 1990 году независимо Р. Кэйдисоном и Д. Ларсоном и А. Сууром. Р. Кэйдисон в своей работе отметил, что локальные дифференцирования имеют важное значение в построении дифференцирований со специфическими свойствами.

Линейный оператор Δ на алгебре A называется *локальным дифференцированием*, если для каждого $x \in A$ существует дифференцирование $D: A \to A$ (зависящее от x) такое, что $\Delta(x) = D(x)$.

Разным вопросам теории локальных дифференцирований посвящены работы Д. Ларсона, А. Сурура, Р. Кэйдисона, М. Брешара, П. Шемрла, Р. Криста, Б. Джонсона, Е. Шольца, В. Тиммермана, В. Шульмана и других авторов.

В то же время проблема описания локальных дифференцирований на алгебре измеримых операторов до сих пор оставалась открытой. В частности, актуальными являются задача описания локальных дифференцирований на коммутативных регулярных алгебрах, алгебрах измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана и некоммутативных алгебрах Аренса, а также выявление локальных дифференцирований, не являющихся дифференцированиями на вышеуказанных алгебрах.

Диссертационная работа посвящена изучению локальных дифференцирований на алгебрах измеримых операторов.

Степень изученности проблемы. Д. Ларсон и А. Сурур доказали, что каждое локальное дифференцирование на алгебре $B(X)$ всех ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве X, является дифференцированием. Р. Кэйдисон рассматривал локальные дифференцирования на алгебрах фон Неймана и в некоторых полиномиальных алгебрах. Было доказано, что каждое непрерывное локальное дифференцирование из алгебры фон Неймана M в дуальный M-бимодуль является дифференцированием. Этот результат был обобщен в работе М. Брешара, для более широкого класса линейных операторов (точнее, в случае произвольного нормированного M-бимодуля), т.е. для операторов Δ из M в нормированный M-бимодуль E, которые удовлетворяют тождеству $\Delta(p)=\Delta(p)p+p\Delta(p)$ для каждого идемпотента $p\in M$. Каждое локальное дифференцирование удовлетворяет тождеству $\Delta(p)=\Delta(p)p+p\Delta(p)$. М. Брешар и П. Шемрл доказали, что всякий линейный оператор Δ на $M_n(R)$, удовлетворяющий тождеству $\Delta(p)=\Delta(p)p+p\Delta(p)$, где $M_n(R)$ - алгебра $n\times n$ матриц над кольцом R с единицей, содержащим элемент $\frac{1}{2}$, является дифференцированием.

Б. Джонсон обобщил вышеуказанный результат Р. Кэйдисона и показал, что каждое локальное дифференцирование из C^*-алгебры A в произвольный банаховый A-бимодуль является дифференцированием. Он также доказал, что каждое локальное дифференцирование из C^*-алгебры A в произвольный банаховый A-бимодуль является непрерывным.

Примеры локальных дифференцирований, которые не являются дифференцированиями были приведены в работах Р. Кэйдисона и Р. Криста.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Исследование проводились по гранту Ф.1.1.3 программы фундаментальных исследований I Ф «Математика, механика, информатика» в Институте математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Цель исследования. Целью диссертационной работы является изучение локальных дифференцирований на алгебрах измеримых операторов.

Задачи исследования. В диссертационной работе рассматриваются следующие задачи:

1. Изучение локальных дифференцирований на алгебрах измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана типа I.
2. Описание локальных дифференцирований некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с конечной алгеброй фон Неймана и с точным нормальным полуконечным следом.
3. Изучение отображений типа дифференцирования на стандартных алгебрах.

Объект и предмет исследования. Алгебра измеримых операторов, некоммутативные алгебры Аренса, локальные дифференцирования, отображения типа дифференцирования.

Методы исследований. В работе использовались общие методы функционального анализа и теории операторных алгебр.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Описание локальных дифференцирований некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с конечной алгеброй фон Неймана и с точным нормальным полуконечным следом;

2. Описание непрерывных локальных дифференцирований на алгебре τ-измеримых операторов;

3. Исследование отображений типа дифференцирования на стандартных алгебрах;

4. Исследование локальных дифференцирований на коммутативных регулярных алгебрах;

5. Описание локальных дифференцирований на алгебрах измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана типа I без абелевой компоненты.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

– описаны локальные дифференцирования некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с конечной алгеброй фон Неймана и с точным нормальным полуконечным следом;

– доказано, что в случае алгебры фон Неймана M с точным нормальным полуконечным следом τ, всякий t_τ-непрерывный линейный оператор Δ на алгебре $S(M,\tau)$, удовлетворяющий тождеству $\Delta(p)=\Delta(p)p+p\Delta(p)$ является дифференцированием;

– установлено, что всякий линейный оператор $D: A(X)\to B(X)$, удовлетворяющий тождеству $D(x^n)=\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}D(x)x^{n-k}$, $x\in A(X)$ для некоторого фиксированного числа $n\geq 3$, является пространственным дифференцированием;

– в коммутативном случае найдены необходимые и достаточные условия существования на алгебрах $S(M)$ и $S(M,\tau)$ локальных дифференцирований, не являющихся дифференцированиями;

– описаны локальные дифференцирования алгебр $LS(M)$, $S(M)$ и $S(M,\tau)$ относительно алгебр фон Неймана типа I без абелевой компоненты.

Научная и практическая значимость результатов исследования. В работе получено решение важных проблем теории локальных дифференцирований на неограниченных алгебрах. Все результаты и методы, представленные в работе, могут быть использованы при исследованиях по функциональному анализу, теории операторных алгебр, а также в алгебраическом обосновании квантовой статистической механики.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты диссертации могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории локальных дифференцирований и при чтении специальных курсов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре «Операторные алгебры и их приложения» под руководством академика Ш.А. Аюпова (Институт математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека), на городском семинаре по функциональному анализу в НУУз под руководством проф.

В.И. Чилина, на научном семинаре кафедры «Алгебра и функциональный анализ» механико-математического факультета НУУз под руководством академика Ш.А. Аюпова, на научном семинаре при Специализированном Совете Д.067.02.03 при НУУз под руководством академика А.С. Садуллаева, на республиканских научных конференциях «Современные проблемы математики, механики и информационных технологий» (Ташкент, 8 мая 2008 г.) и «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Нукус, 25-27 октября, 2009 г.).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в виде статей, тезисов и трудов конференций. Список публикаций приведен в конце автореферата, в разделе «Список опубликованных работ». Постановка задач и некоторые идеи доказательств работ [2-5] принадлежат Ш.А. Аюпову, С. Альбеверио и К.К. Кудайбергенову, а остальные основные результаты получены диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 7 параграфов, заключения и 54 наименований использованной литературы. Полный объём диссертации – 91 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается краткий анализ современного состояния изучаемых в диссертации проблем теории дифференцирований и локальных дифференцирований, формируется цель исследования и приводится аннотация полученных результатов.

В первой главе излагаются предварительные сведения и обозначения, необходимые для изложения результатов диссертации.

В первом параграфе первой главы диссертации приводятся некоторые предварительные сведения об алгебрах измеримых и локально измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана.

Во втором параграфе первой главы приводятся описания дифференцирований на коммутативных регулярных алгебрах и алгебрах измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана типа I.

Вторая глава посвящена исследованию отображении типа дифференцирования на операторных алгебрах.

В первом параграфе второй главы изучаются локальные дифференцирования на некоммутативных алгебрах Аренса.

Пусть M – алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ.

Для каждого оператора $x \in S(M,\tau)^{+}$ положим $\tau(x) = \sup\limits_{n} \tau\left(\int\limits_{0}^{n} \lambda de_{\lambda}\right)$,

где $\{e_{\lambda}\}_{\lambda \geq 0}$ – спектральное семейство проекторов оператора x.

Для $p \geq 1$ положим $L^{p}(M,\tau) = \{x \in S(M,\tau) : \tau(|x|^{p}) < \infty\}$. Тогда $L^{p}(M,\tau)$ – банахово пространство относительно нормы

$$\|x\|_p = (\tau(|x|^p))^{1/p}, \quad x \in L^p(M,\tau).$$

Рассмотрим пересечение

$$L^\omega(M,\tau) = \bigcap_{p\geq 1} L^p(M,\tau).$$

$L^\omega(M,\tau)$ является локально выпуклой полной метризуемой $*$-алгеброй относительно топологии t, порожденной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}_{p\geq 1}$.

Алгебра $L^\omega(M,\tau)$ называется (некоммутативной) *алгеброй Аренса*.

Отметим, что $L^\omega(M,\tau)$ является *-подалгеброй в $S(M,\tau)$ и если τ – конечный след, то $M \subset L^\omega(M,\tau)$.

Теперь рассмотрим следующие пространства

$$L_2^\omega(M,\tau) = \bigcap_{p\geq 2} L^p(M,\tau) \text{ и } M + L_2^\omega(M,\tau) = \{x + y : x \in M,\ y \in L_2^\omega(M,\tau)\}.$$

Отметим, что $L_2^\omega(M,\tau)$ и $M + L_2^\omega(M,\tau)$ являются $*$-алгебрами, при этом алгебра Аренса $L^\omega(M,\tau)$ является идеалом в $M + L_2^\omega(M,\tau)$.

Если $\tau(\mathbf{1}) < \infty$, то выполняются равенства

$$M + L_2^\omega(M,\tau) = L_2^\omega(M,\tau) = L^\omega(M,\tau).$$

Так как алгебра Аренса $L^\omega(M,\tau)$ является идеалом в $M + L_2^\omega(M,\tau)$, то всякий элемент $a \in M + L_2^\omega(M,\tau)$ определяет пространственное дифференцирование на $L^\omega(M,\tau)$ по правилу $D(x) = ax - xa, \quad x \in L^\omega(M,\tau)$.

Всякое дифференцирование D алгебры $L^\omega(M,\tau)$ является пространственным, при этом оно порождается элементом $M + L_2^\omega(M,\tau)$, т.е.

$$D(x) = ax - xa, \quad x \in L^\omega(M,\tau),$$

для некоторого $a \in M + L_2^\omega(M,\tau)$.

Следующее утверждение является основным результатом этого параграфа.

Теорема 2.1.3. Пусть M – конечная алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ. Всякое локальное дифференцирование Δ на алгебре $L^\omega(M,\tau)$ является дифференцированием.

Из теоремы 2.1.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.1.2. Пусть M – коммутативная алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ. Тогда всякое локальное дифференцирование Δ на алгебре $L^\omega(M,\tau)$ тождественно равно нулю.

Второй параграф второй главы посвящен описанию непрерывных локальных дифференцирований на алгебре τ-измеримых операторов.

Топология сходимости по мере t_τ на алгебре $S(M,\tau)$ задается следующим семейством окрестностей нуля:

$$V(\varepsilon,\delta) = \left\{x \in S(M,\tau) : \exists e \in P(M),\ \tau(e^\perp) \leq \delta,\ xe \in M,\ \|xe\|_M \leq \varepsilon\right\},$$

где ε,δ – положительные числа и $\|\cdot\|_M$ означает операторную норму на M.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.2.1. Пусть M – алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ. Всякий t_τ-непрерывный линейный оператор Δ на $S(M,\tau)$, удовлетворяющий тождеству $\Delta(p)=\Delta(p)p+p\Delta(p)$ является дифференцированием.

В случае алгебр типа I теорема 2.2.1 усиливается следующим образом:

Следствие 2.2.1. Пусть M – алгебра фон Неймана типа I с точным нормальным полуконечным следом τ. Тогда всякий t_τ-непрерывный линейный оператор Δ на $S(M,\tau)$, удовлетворяющий тождеству $\Delta(p)=\Delta(p)p+p\Delta(p)$ (в частности, локальное дифференцирование), является внутренним дифференцированием.

В третьем параграфе второй главы изучаются отображения типа дифференцирования на стандартных алгебрах.

Пусть A – некоторая алгебра. Напомним, что линейный оператор $D:A\to A$ называется йордановым дифференцированием, если $D(x^2)=D(x)x+xD(x)$ для всех $x\in A$. Ясно, что всякое дифференцирование на алгебре A является йордановым дифференцированием. Обратное, вообще говоря, неверно. Одним из важных задач операторных алгебр является описание классов алгебр, для которых всякое йордановое дифференцирование является дифференцированием.

Пусть X – вещественное или комплексное нормированное пространство, $B(X)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в X, $\mathcal{F}(X)$ – идеал всех конечномерных операторов из $B(X)$.

Алгебра $A(X)\subset B(X)$ называется *стандартной*, если $\mathcal{F}(X)\subset A(X)$.

Заметим, что всякое дифференцирование на $A(X)$ удовлетворяет более общему тождеству, а именно

$$D(x^n)=\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}D(x)x^{n-k},\ x\in A(X), \tag{1}$$

где $n\geq 3$ – некоторое фиксированное число.

В этом параграфе рассматривается вопрос о том, что всякий ли линейный оператор, удовлетворяющий тождеству (1) является дифференцированием.

Основной результат настоящего параграфа заключается в следующем утверждении.

Теорема 2.3.3. Пусть X – вещественное или комплексное нормированное пространство, $A(X)$ – стандартная алгебра в $B(X)$ и

$D: A(X) \to B(X)$ – линейный оператор, удовлетворяющий тождеству (1) для всех $x \in A(X)$. Тогда D – пространственное дифференцирование, т.е. $D(x) = ax - xa,\ x \in A(X)$ для некоторого $a \in B(X)$. В частности, D – непрерывно.

Третья глава посвящена изучению локальных дифференцирований на алгебрах измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана типа I.

В первом параграфе третьей главы описываются локальные дифференцирования на коммутативных регулярных алгебрах.

Пусть A – коммутативная унитальная регулярная алгебра над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, ∇ – булева алгебра всех идемпотентов алгебры A и μ – конечная строго положительная счетно-аддитивная мера на ∇. Далее предположим, что A – полна относительно метрики $\rho(a,b) = \mu(s(a-b)),\ a, b \in A$.

Содержательным примером таких алгебр является алгебра $L^0(\Omega) = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ – алгебра классов эквивалентности комплексных измеримых функций на некотором измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с конечной мерой μ.

Так как всякое дифференцирование D на коммутативной регулярной алгебре A не увеличивает носитель элемента и $D|_\nabla = 0$, то по определению, каждое локальное дифференцирование Δ на A удовлетворяет следующим условиям

$$s(\Delta(a)) \leq s(a),\ \ \forall a \in A, \tag{2}$$

$$\Delta|_\nabla \equiv 0. \tag{3}$$

Таким образом, условия (2), (3) являются необходимыми условиями для того, чтобы линейный оператор Δ был локальным дифференцированием. Оказывается, что эти условия являются также и достаточными.

Лемма 3.1.2. Линейный оператор Δ на A, удовлетворяющий соотношениям (2), (3), является локальным дифференцированием.

Пусть A – коммутативная унитальная регулярная алгебра над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Элемент $a \in A$ называется *счетно-значным*, если $a = \sum_{k=1}^{\omega} \alpha_k e_k$, где $\alpha_k \in \mathbb{C},\ \ e_k \in \nabla,\ \ e_k e_j = 0, k \neq j,\ \ k, j = 1, \ldots, \omega$, где ω – натуральное число или ∞. Через $K_c(\nabla)$ обозначим множество всех счетно-значных элементов из A.

Следующая теорема дает условия существования локальных дифференцирований, которые не являются дифференцированиями на коммутативных унитальных регулярных алгебрах.

Теорема 3.1.1. Пусть A – коммутативная унитальная регулярная алгебра над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, μ – конечная строго положительная счетно-аддитивная мера на булевой алгебре ∇ всех идемпотентов алгебры A и A – полна относительно метрики $\rho(a,b)=\mu(s(a-b)),\ a,b\in A.$ Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $K_c(\nabla)\neq A$;

2) алгебра A допускает нетривиальные дифференцирования;

3) алгебра A допускает нетривиальные локальные дифференцирования;

4) алгебра A допускает локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированием.

Следующее утверждение дает условия существования локальных дифференцирований, которые не являются дифференцированиями на алгебрах $S(M)$ и $S(M,\tau)$.

Теорема 3.1.2. Пусть M – коммутативная алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) решетка проекторов $P(M)$ – неатомична;

2) алгебра $S(M)$ (соответственно $S(M,\tau)$) допускает невнутренние дифференцирования;

3) алгебра $S(M)$ (соответственно $S(M,\tau)$) допускает нетривиальные локальные дифференцирования;

4) алгебра $S(M)$ (соответственно $S(M,\tau)$) допускает локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированием.

Замечание 3.1.1. Отметим, что эквивалентность условий 1) и 2) в теоремах 3.1.1 и 3.1.2 доказана в работе А.Ф. Бера, В.И. Чилина, Ф.А. Сукочева.

Второй, и заключительный параграф третьей главы посвящен описанию локальных дифференцирований на алгебрах измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана типа I без абелевой компоненты.

Пусть A – коммутативная алгебра и $M_n(A)$ – алгебра $n\times n$-матриц над $A.$ Если $e_{ij},\ i,j=\overline{1,n}$ – единичные матрицы в $M_n(A)$, то каждый элемент $x\in M_n(A)$ имеет форму

$$x=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}e_{ij},\ a_{ij}\in A,\ i,j=\overline{1,n}.$$

Пусть $\delta: A\to A$ – дифференцирование. Полагая

$$D_\delta\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}e_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\delta(a_{ij})e_{ij} \tag{4}$$

получим корректно определенное дифференцирование D_δ на алгебре $M_n(A)$, при этом его сужение на центр алгебры $M_n(A)$ совпадает с данным δ.

Пусть M – однородная алгебра фон Неймана типа $\mathrm{I}_n,\ n\in\mathbb{N}$ с центром $Z(M)$. Тогда алгебра M $*$-изоморфна алгебре $M_n(Z(M))$ всех $n\times n$-матриц над $Z(M)$ и алгебра $LS(M)=S(M)$ $*$-изоморфна алгебре

$M_n(S(Z(M)))$ всех $n\times n$-матриц над $S(Z(M))$, где $S(Z(M))$ – алгебра измеримых операторов относительно коммутативной алгебры фон Неймана $Z(M)$.

Если M – произвольная конечная алгебра фон Неймана типа I с центром $Z(M)$, то существует семейство $\{z_n\}_{n\in F}$, $F\subset\mathbb{N}$ центральных проекторов в M с $\sup\limits_{n\in F} z_n=\mathbf{1}$ такое, что алгебра M $*$-изоморфна C^*-произведению алгебр фон Неймана z_nM типа I_n, $n\in F$, т.е. $M\cong\bigoplus\limits_{n\in F} z_nM$. Тогда

$$S(M)\cong\prod_{n\in F}S(z_nM).$$

Предположим, что D – дифференцирование на $S(M)$ и δ – его сужение на её центр $S(Z(M))$. Тогда δ отображает каждое $z_nS(Z(M))\cong Z(S(z_nM))$ в себя. Поэтому δ порождает дифференцирование δ_n на $z_nS(Z(M))$ для каждого $n\in F$.

Пусть D_{δ_n} – дифференцирование на матричной алгебре $M_n(z_nZ(S(M)))\cong S(z_nM)$, определенное по правилу (4). Положим

$$D_\delta(\{x_n\}_{n\in F})=\{D_{\delta_n}(x_n)\},\quad \{x_n\}_{n\in F}\in S(M). \tag{5}$$

Тогда отображение D_δ является дифференцированием на $S(M)\equiv LS(M)$.

Теперь рассмотрим дифференцирования на алгебре $LS(M)$ локально измеримых операторов относительно алгебры фон Неймана типа I.

Пусть M – алгебра фон Неймана типа I. Тогда существует центральный проектор $z_0\in M$ такой, что

1) z_0M является конечной алгеброй фон Неймана;

2) $z_0^{\perp}M$ является алгеброй фон Неймана типа I_∞.

Рассмотрим дифференцирование D на $LS(M)$ и пусть δ – его сужение на $Z(LS(M))$ – центр алгебры $LS(M)$. Тогда $z_0^{\perp}D$ является внутренним и следовательно, имеем $z_0^{\perp}\delta\equiv 0$, т.е. $\delta=z_0\delta$.

Пусть D_δ – дифференцирование на $z_0LS(M)$ определенное по правилу (5). Рассмотрим продолжение D_δ на $LS(M)=z_0LS(M)\oplus z_0^{\perp}LS(M)$ определенное по правилу

$$D_\delta(x_1+x_2):=D_\delta(x_1),\quad x_1\in z_0LS(M),\, x_2\in z_0^{\perp}LS(M). \tag{6}$$

Если M – алгебра фон Неймана типа I и $A=LS(M)$, $S(M)$ или $S(M,\tau)$, то каждое дифференцирование D на A единственным образом представляется в виде

$$D=D_a+D_\delta,$$

где D_a – внутреннее дифференцирование, порожденное элементом $a\in A$, D_δ – дифференцирование вида (6), порожденное дифференцированием δ на центр A.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.2.3. Пусть M – алгебра фон Неймана типа I без абелевой компоненты. Всякое локальное дифференцирование Δ на $LS(M)$ является дифференцированием.

Из теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.2.4. Пусть M – алгебра фон Неймана типа I без абелевой компоненты и с точным нормальным полуконечным следом τ, Δ – локальное дифференцирование на $S(M)$ или $S(M,\tau)$. Тогда Δ является дифференцированием.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой главе приведены предварительные сведения и обозначения, необходимые для изложения результатов диссертации.

Во второй главе получены результаты для отображении типа дифференцирования на операторных алгебрах.

Дано описание локальных дифференцирований некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с конечной алгеброй фон Неймана и с точным нормальным полуконечным следом.

Доказано, что в случае алгебры фон Неймана M с точным нормальным полуконечным следом τ, всякий t_τ-непрерывный линейный оператор Δ на алгебре $S(M,\tau)$, удовлетворяющий тождеству $\Delta(p)=\Delta(p)p+p\Delta(p)$ является дифференцированием.

Показано, что всякий линейный оператор $D: A(X)\rightarrow B(X)$, удовлетворяющий тождеству

$$D(x^n)=\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}D(x)x^{n-k},\ x\in A(X)$$

является пространственным дифференцированием, где $n\geq 3$ – некоторое фиксированное число.

В третьей главе описаны локальных дифференцирований алгебр всех локально измеримых, измеримых и τ-измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана типа I без абелевой компоненты. Также в коммутативном случае найдены необходимые и достаточные условия существования на алгебрах $S(M)$ и $S(M,\tau)$ локальных дифференцирований, не являющихся дифференцированиями.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю академику АН Республики Узбекистан, доктору физико-математических наук, профессору Шавкату Абдуллаевичу АЮПОВУ за постановку задач, ценные предложения, замечания и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Нуржанов Б.О. Дифференцирования на стандартных операторных алгебрах // Современные проблемы математики, механики и информационных технологий: Тез. докл. Респ. науч. конф. 8 мая 2008. – Ташкент, 2008. – С. 210-212.
2. Аюпов Ш.А., Кудайбергенов К.К., Нуржанов Б.О. Локальные дифференцирования алгебры τ-измеримых операторов // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2009. – № 2. – С. 20-34.
3. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K.K., Nurjanov B.O. Local derivations on algebras of measurable operators // SFB 611, Universitat Bonn, Preprint. – Bonn, 2009. – № 436. – 20 p.
4. Аюпов Ш.А., Кудайбергенов К.К., Нуржанов Б.О. Локальные дифференцирования алгебры измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана типа I // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2010. – № 3. – С. 9-18.
5. Albeverio S., Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. and Nurjanov B.O. Local derivations on algebras of measurable operators // Communications in Contemporary Mathematics. – New Jersey, 2011. – № 4 (13). – P. 643-657.
6. Нуржанов Б.О. Локальные дифференцирования алгебр фон Неймана типа I // Дифференциальные уравнения и их приложения: Тез. докл. Респ. науч. конф. 25-27 октября 2009. – Нукус, 2009. – С. 109-110.
7. Нуржанов Б.О. Описание локальных дифференцирований на некоммутативных алгебрах Аренса // Вестник Каракалпакского государственного университета им. Бердаха. – Нукус, 2011. – № 1-2. – С. 17-20.

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор **Нуржанов Бердах Орынбаевич**нинг 01.01.01-математик анализ ихтисослиги бўйича **«Ўлчовли операторлар алгебраларидаги локал дифференциаллашлар»** мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: Дифференциаллаш, ички дифференциаллаш, локал дифференциаллаш, фон Нейман алгебраси, ўлчовли оператор, Аренс алгебраси.

Тадқиқот объектлари: Ўлчовли операторлар алгебраси, нокоммутатив Аренс алгебралари, локал дифференциаллашлар.

Ишнинг мақсади: Ўлчовли операторлар алгебраларида локал дифференциаллашларни тавсифлаш.

Тадқиқот методлари: Ишда функционал анализ ва операторлар алгебралари назариясининг умумий усуллари фойдаланилди.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: Чекли фон Нейман алгебралари ва аниқ нормал ярим чекли из билан ассоциирланган нокоммутатив Аренс алгебралари локал дифференциаллашлари тавсифланган; аниқ нормал ярим чекли τ из билан M фон Нейман алгебраси ҳолидаги $S(M,\tau)$ алгебрасидаги $\Delta(p) = \Delta(p)p + p\Delta(p)$ айниятни қонаотлантирувчи ихтиёрий Δ t_τ-узлуксиз чизиқли операторнинг дифференциаллаш бўлиши исботланган; $D(x^n) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}D(x)x^{n-k}, \quad x \in A(X)$ айниятни қаноатлантирувчи ихтиёрий $D: A(X) \to B(X)$ чизиқли операторнинг ташқи дифференциаллаш бўлиши исботланган, бу ерда $n \geq 3$ – бирор фиксирланган сон; коммутатив ҳолда $S(M)$ ва $S(M,\tau)$ алгебраларида дифференциаллашлар бўлмаган локал дифференциаллашлар мавжудлиги учун зарур ва етарли шартлар топилган; типи I абел компонентаси бўлмаган фон Нейман алгебраларига нисбатан $LS(M)$, $S(M)$ ва $S(M,\tau)$ алгебраларида локал дифференциаллашлари тавсифланган.

Амалий аҳамияти: Диссертацияда олинган натижалар илмий-назарий аҳамиятга эга.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: Ишда келтирилган натижалар функционал анализ ва операторлар алгебралари назариясидан магистрантлар ва аспирантлар учун махсус курслар ўқитишда қўлланилиши мумкин.

Қўлланиш соҳаси: Функционал анализ, операторлар алгебралари назарияси, математик физика ва уларнинг тадбиқлари.

РЕЗЮМЕ

диссертации **Нуржанова Бердаха Орынбаевича** на тему: **«Локальлные дифференцирования на алгебрах измеримых операторов»** на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ.

Ключевые слова: Дифференцирование, внутреннее дифференцирование, локальное дифференцирование, алгебра фон Неймана, измеримый оператор, алгебра Аренса.

Объекты исследования: Алгебра измеримых операторов, некоммутативные алгебры Аренса, локальные дифференцирования.

Цель работы: Описание локальных дифференцирований на алгебрах измеримых операторов.

Методы исследования: В работе применены общие методы функционального анализа и теории операторных алгебр.

Полученные результаты и их новизна: Получено описание локальных дифференцирований некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с конечной алгеброй фон Неймана и с точным нормальным полуконечным следом; доказано, что в случае алгебры фон Неймана M с точным нормальным полуконечным следом τ, всякий t_τ-непрерывный линейный оператор Δ на алгебре $S(M,\tau)$, удовлетворяющий тождеству $\Delta(p)=\Delta(p)p+p\Delta(p)$ является дифференцированием; показано, что всякий линейный оператор $D: A(X)\to B(X)$, удовлетворяющий тождеству $D(x^n)=\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}D(x)x^{n-k},\ x\in A(X)$ является пространственным дифференцированием, где $n\geq 3$ – некоторое фиксированное число; в коммутативном случае найдены необходимые и достаточные условия существования на алгебрах $S(M)$ и $S(M,\tau)$ локальных дифференцирований, не являющихся дифференцированиями; получено описание локальных дифференцирований алгебр $LS(M)$, $S(M)$ и $S(M,\tau)$ относительно алгебр фон Неймана типа I без абелевой компоненты.

Практическая значимость: Результаты, полученные в диссертации, имеют научно – теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: Результаты, представленные в работе, могут быть использованы при чтении специальных курсов по функциональному анализу и теорий операторных алгебр для магистрантов и аспирантов.

Область применения: Функциональный анализ, теория операторных алгебр, математическая физика и их приложения.

RESUME

Thesis of **Nurjanov Berdakh Orinbayevich** on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in physics and mathematics on specialty 01.01.01 - Mathematical analysis, subject: «**Local derivations on algebras of measurable operators».**

Key words: Derivation, inner derivation, local derivation, von Neumann algebra, measurable operator, Arens algebra.

Subjects of inquiry: Algebra of measurable operators, non commutative Arens algebras, local derivations.

Aim of the inquire: Description of local derivations on algebras of measurable operators.

Methods of the inquire: In the work general methods of functional analysis, of theory operator algebras are used.

The results achieved and their novelty: a description of local derivations on the non commutative Arens algebras associated with von Neumann algebra and faithful normal semi-finite trace is obtained; it is proved that every t_τ-continuous linear operator Δ on the algebra $S(M,\tau)$ satisfying the identity $\Delta(p)=\Delta(p)p+p\Delta(p)$ is a derivation, where M be a von Neumann algebra with a faithful normal semi-finite trace τ; it is proved that every linear operator $D: A(X)\to B(X)$ satisfying the identity $D(x^n)=\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}D(x)x^{n-k},\ x\in A(X)$ is a spatial derivation, where $n\geq 3$ – some fix number; necessary and sufficient conditions for the existence of local derivations which are not derivations on algebras $S(M)$ and $S(M,\tau)$ affiliated with a commutative von Neumann algebra are obtained; a description of local derivations of the algebras $LS(M)$, $S(M)$ and $S(M,\tau)$ concerning type I von Neumann algebras without abelian direct summands is obtained.

Practical value: The results of the dissertation have a theoretical character.

Degree of embed and economic effectivity: The results, presented in the work can be used in special courses on functional analysis and theory of operator algebras for masters and post-graduate students.

Field of application: Functional analysis, theory of operator algebras, mathematical physics and its applications.